ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 601, 2007, c. 46–49

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 601, 2007, p. 46–49

ІНШЕ ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ БРЕЛО-АДАМАРА ДЛЯ СУБГАРМОНІЙНИХ У ПРОСТОРІ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

В.В. Достойна, О.В. Веселовська

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 16 жовтня 2007 р.)

Дано інше доведення відомого представлення Брело-Адамара субгармонійних у просторі функцій скінченного порядку, а також його аналогу для δ-субгармонійних функцій.

Ключові слова: субгармонійна функція, скінченний порядок, неванліннівська характеристика, Брело-Адамара представлення

2000 MSC: 31B05

УДК: 517.57

Нехай R^m – m - вимірний евклідів простір, $S^m = \{x \in R^m : |x| = 1\}$ – одинична сфера в R^m з центром у початку координат, а ω_m – площа її поверхні.

Позначимо через Δ оператор Лапласа. Якщо u – субгармонійна в R^m, $m \geq 2$, функція, то $\Delta u \geq 0$ в розумінні узагальнених функцій, тому кожній функції u відповідає єдиний розподіл мас $\mu_u = 1/(d_m\omega_m)\Delta u$, який називається розподілом мас, асоційованих за Ріссом із субгармонійною функцією u [1, с. 55-58]. Тут $d_m = \begin{cases} 1, & m = 2, \\ m-2, & m > 2. \end{cases}$

Нехай μ – розподіл мас в R^m такий, що $0 \notin \operatorname{supp}\mu$. Припустимо, що множина

$$M_\mu = \left\{ n : n \in Z_+,\ \int_0^\infty \frac{d\mu(t)}{t^{n+m-1}} < \infty \right\}$$

непорожня. Позначимо $p = p_\mu = \inf M_\mu$,

$$K_p(y;\varsigma) = \begin{cases} \ln\left|1 - \frac{y}{\varsigma}\right| + \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{\left|\frac{y}{\varsigma}\right|^k \cos k\varphi}{k}, & m = 2, \\ -\dfrac{1}{|y-\varsigma|^{m-2}} + \dfrac{1}{|\varsigma|^{m-2}} \sum\limits_{k=0}^{p} \left|\dfrac{y}{\varsigma}\right|^k C_k^\nu\left[\left(\dfrac{y}{|y|}, \dfrac{\varsigma}{|\xi|}\right)\right], & m > 2, \end{cases} \qquad (1)$$

де φ – кут між радіус-векторами точок $y, \varsigma \in R^2$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в R^m, $m > 2$, а C_k^ν – многочлени Гегенбауера [2, с. 302, 329] степеня k та порядку $\nu = \dfrac{m-2}{2}$, які визначаються з розкладу

$$\frac{1}{(1-2\tau t+\tau^2)^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^\nu(t)\tau^k, \quad |t| \leq 1. \qquad (2)$$

Функція

$$J_p(y;\mu) = \int\limits_{|\varsigma|<\infty} K_p(y;\varsigma)\, d\mu(\varsigma)$$

називається канонічним інтегралом Вейерштрасса роду p [1, с. 78]. Вона є субгармонійною функцією, а μ – розподілом мас, асоційованих з нею за Ріссом.

Функція

$$T(r,u) = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{S^m} u^+(r\xi)dS(\xi), \quad u^+ = \max(u;0),$$

називається характеристикою Неванлінни [3, с.145] субгармонійної функції u, а величина

$$\rho(u) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(r,u)}{\ln r},$$

– її порядком [3, с. 161].

Нехай u – субгармонійна в R^m, $m \geq 3$, гармонійна в деякому околі початку координат функція така, що $u(0) = 0$, а λ – додатна, неперервна, неспадна на $(0,\infty)$ функція, яка називається функцією росту.

Позначимо через $\alpha[\lambda]$ нижній порядок функції росту λ, який визначається співвідношенням

$$\alpha[\lambda] = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \lambda(r)}{\ln r}.$$

Приймемо $B(r,u) = \max\{u(y) : |y| \leq r\}$.

Субгармонійна функція u називається функцією скінченного λ-типу [4], якщо існують сталі a, b такі, що

$$B\left(r,u\right) \le a\lambda\left(br\right)$$

при всіх $r > 0$. Клас таких функцій позначається через Λ_S.

У [5] доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $u \in \Lambda_S$. Тоді існують субгармонійна функція $h \not\equiv -\infty$, необмежена множина додатних чисел Ω і сім'я $\{u_R : R \in \Omega\}$ субгармонійних функцій такі, що*

1) розподіли мас, асоційованих за Ріссом із функціями u_R та $u+h$, збігаються у кулі $V_R = \{y \in R^m : |y| \le R\}$ для всіх $R \in \Omega$;

2) $(u+h) - u_R \to 0$ рівномірно на компактах із R^m, коли $R \to \infty$, $R \in \Omega$;

3) $h, u_R, (u+h) - u_R \in \Lambda_S$ для всіх $R \in \Omega$.

Якщо $\alpha[\lambda] = \infty$, то можна взяти $h \equiv 0$.

Якщо $\ln\lambda\left(r\right)$ – опукла відносно $\ln r$ функція, то можна взяти $h \equiv 0$ і $\Omega = \{R : R \ge R_0\}$ при деякому $R_0 > 0$.

Як наслідок з цієї теореми отримаємо відоме представлення Брело-Адамара субгармонійних функцій скінченного порядку.

Теорема 2. (Брело-Адамара).

Нехай $u,\ u(0) = 0,$ – субгармонійна в R^m, $m \ge 3$, функція скінченного порядку $\rho \ge 0$, $[\rho] = q$ і $\mu = \mu_u$. Тоді

$$u\left(y\right) = J_q\left(y;\mu\right) + \Phi\left(y\right),$$

де Φ – гармонійний многочлен степеня $n \le q$.

Для доведення цієї теореми нам потрібні деякі відомості про сферичні гармоніки (детальніше див., наприклад, [6, с. 157–174], [7]).

Сферичною гармонікою або сферичною функцією Лапласа степеня k, $k \in Z_+ = \{0, 1, 2, ...,\}$, яку позначатимемо через $Y^{(k)}$, називається звуження на одиничну сферу S^m, $m \ge 2$, однорідного гармонійного многочлена степеня k. Множину сферичних гармонік степеня k можна розглядати як підпростір простору $L^2(S^m)$ дійснозначних функцій зі скалярним добутком

$$(f,g) = \frac{1}{\omega_m}\int\limits_{S^m} f(x)g(x)dS,$$

де dS – елемент площі сфери S^m. Якщо $\left\{Y_1^{(k)}, ..., Y_{\gamma_k}^{(k)}\right\}$ – ортонормований базис у цьому підпросторі, то $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{Y_1^{(k)}, ..., Y_{\gamma_k}^{(k)}\right\}$ буде ортонормованим базисом у просторі $L^2(S^m)$. Тут $\gamma_k = (2k+m-2)(k+m-3)!/(k!(m-2)!)$ – кількість лінійно-незалежних сферичних гармонік степеня k.

Рядом Фур'є-Лапласа функції $f \in L^1(S^m)$ називається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x;f), \quad x \in S^m,$$

де

$$Y^{(k)}(x;f) = a_1^{(k)}Y_1^{(k)}(x) + ... + a_{\gamma_k}^{(k)}Y_{\gamma_k}^{(k)}(x),$$

$$a_j^{(k)} = (f, Y_j^{(k)}), \quad j = 1, ..., \gamma_k,$$

$(f, Y_j^{(k)})$ – скалярний добуток в $L^2(S^m)$. При $m = 2$ маємо звичайний тригонометричний ряд Фур'є.

Справедлива теорема додавання [7, с.206]

$$C_k^\nu[(x,y)] = \frac{d_m\omega_m}{2\left(k+\nu\right)}\sum_{j=1}^{\gamma_k} Y_j^{(k)}(x)Y_j^{(k)}(y),$$

де $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в R^m, а C_k^ν – многочлени Гегенбауера степеня k та порядку ν.

Із цієї теореми випливає, що сферичні гармоніки $Y^{(k)}(x;f)$ можуть бути виражені через многочлени Гегенбауера:

$$Y^{(k)}(x;f) = \frac{2(k+\nu)}{d_m\omega_m}\int\limits_{S^m} C_k^\nu[(x,\xi)]f(\xi)dS(\xi). \qquad (3)$$

Позначимо $u_r = u(rx),\ r > 0,\ x \in S^m$. Функції

$$c_k(x,r;u) = Y^{(k)}(x;u_r),\ k \in Z_+,$$

називаються сферичними гармоніками, асоційованими із субгармонійною функцією u [8].

Відомо, що [4], [8]

$$c_k(x,r;u) = r^kY_u^{(k)}(x;u_r) + r^k\int\limits_{|\varsigma|\le r} C_k^\nu\left[\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right]\frac{d\mu_u\left(\varsigma\right)}{|\varsigma|^{k+2\nu}} -$$

$$-\frac{1}{r^{k+2\nu}}\int\limits_{|\varsigma|\le r} |\varsigma|^k C_k^\nu\left[\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right]\ d\mu_u\left(\varsigma\right)\ \left(k \in Z_+\right), \quad (4)$$

де $Y_u^{(k)}\left(x\right)$ визначаються із розкладу

$$u\left(rx\right) = \sum_{k=0}^{\infty} r^kY_u^{(k)}\left(x\right)$$

для достатньо малих $r > 0$.

Доведемо теорему 2.

$\square$ *Доведення.* Виберемо $\lambda\left(r\right) = r^{\rho^*}$, $\rho^* > \rho$ і $[\rho^*] = q$, де $[\rho^*]$ позначає цілу частину ρ^*. Тоді можна вважати, що $u \in \Lambda_S$. Оскільки функція $\ln\lambda(r) = \rho^*\ln r$ опукла відносно $\ln r$, то на підставі теореми 1 можна взяти $h \equiv 0$, $\Omega = \{R : R \ge R_0\}$ при деякому $R_0 > 0$, а функцію u_R записати так:

$$u_R(y) = \int\limits_{|\varsigma|\le R} K\left(y;\varsigma\right)d\mu\left(\varsigma\right) + Q_R\left(y\right),$$

де $K(y;\varsigma) = -|y-\varsigma|^{2-m}$, а $Q_R(y)$ – гармонійна функція від y при кожному $R \in \Omega$. Останнє зображення можливе завдяки теоремі Рісса [3, с. 123] про представлення субгармонійної функції та твердженню 1) теореми 1. Запишемо функцію u_R інакше

$$u_R(y) = \int\limits_{|\varsigma| \le R} K_0(y;\varsigma)\, d\mu(\varsigma) + \Phi_R(y),$$

де функція $K_0(y;\varsigma)$ визначена співвідношенням (1), а $\Phi_R(y)$ – гармонійна функція від y при кожному $R \in \Omega$ така, що $\Phi_R(0) = 0$. На основі твердження 3) теореми 1 Φ_R – гармонійний многочлен степеня, який не перевищує q, тобто

$$\Phi_R(y) = Y_R^{(1)}(x)\, r + Y_R^{(2)}(x)\, r^2 + .. + Y_R^{(q)}(x)\, r^q,$$

де $y = rx,\ r > 0,\ x \in S^m$.

Використовуючи співвідношення (2), отримаємо при $r < |\varsigma|$

$$K_0(rx;\varsigma) = -\frac{1}{|rx-\varsigma|^{2\nu}} + \frac{1}{|\varsigma|^{2\nu}} =$$

$$= -\frac{1}{|\varsigma|^{2\nu}\left(1 - 2\frac{r}{|\varsigma|}\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right) + \left(\frac{r}{|\varsigma|}\right)^2\right)^{\nu}} + \frac{1}{|\varsigma|^{2\nu}} =$$

$$= -\frac{1}{|\varsigma|^{2\nu}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|\varsigma|}\right)^k \cdot C_k^{\nu}\left[\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right], \quad x \in S^m.$$

Отже, формули (4) набудуть вигляду

$$c_k(x,r;u_R) = -r^k \int\limits_{r<|\varsigma|\le R} C_k^{\nu}\left[\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right] \frac{d\mu(y)}{|\varsigma|^{k+2\nu}} -$$

$$-\frac{1}{r^{k+2\nu}} \int\limits_{|\varsigma|\le r} |\varsigma|^k C_k^{\nu}\left[\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right] d\mu(y), \quad k > q;$$

$$c_k(x,r;u_R) = r^k\left[Y_R^{(k)}(x) - \int\limits_{|\varsigma|\le R} C_k^{\nu}\left[\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right]\frac{d\mu(\varsigma)}{|\varsigma|^{k+2\nu}}\right] +$$

$$+ \int\limits_{|\varsigma|\le r} \left(\frac{r}{|\varsigma|}\right)^k C_k^{\nu}\left[\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right] \frac{d\mu(\varsigma)}{|\varsigma|^{2\nu}} -$$

$$\frac{1}{r^{2\nu}} \int\limits_{|\varsigma|\le r} \left(\frac{|\varsigma|}{r}\right)^k C_k^{\nu}\left[\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right] d\mu(\varsigma), \quad 1 \le k \le q.$$

Враховуючи те, що u_R прямує до u рівномірно на компактах із R^m при $R \to \infty$, а також те, що два останні інтеграли у другій рівності при достатньо малих r прямують до нуля, отримаємо

$$\left[Y_R^{(k)}(x) - \int\limits_{|\varsigma|\le R} C_k^{\nu}\left[\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right] \frac{d\mu(\varsigma)}{|\varsigma|^{k+2\nu}}\right] \to Y^{(k)}(x;u) =$$

$$= Y^{(k)}(x),$$

коли $R \to \infty$. Тому, якщо позначити

$$\overline{Y}_R^{(k)}(x) = Y^{(k)}(x) + \int\limits_{|\varsigma|\le R} C_k^{\nu}\left[\left(x, \frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right] \frac{d\mu(\varsigma)}{|\varsigma|^{k+2\nu}},$$

то

$$\overline{Y}_R^{(k)}(x) = Y_R^{(k)}(x) + o(1),\ R \to \infty, \quad 1 \le k \le q.$$

Приймемо

$$\overline{\Phi}_R(y) = \overline{Y}_R^{(1)}(x)\, r + \overline{Y}_R^{(2)}(x)\, r^2 + .. + \overline{Y}_R^{(q)}(x)\, r^q,$$

$$\overline{u}_R(y) = \int\limits_{|\varsigma|\le R} K_0(y;\varsigma)\, d\mu(\varsigma) + \overline{\Phi}_R(y).$$

Очевидно, що $u - \overline{u}_R = (u - u_R) + (u_R - \overline{u}_R) \to 0$ рівномірно на компактах із R^m при $R \to \infty$. Але

$$\overline{u}_R(y) = Y^{(1)}(x)\, r + ... + Y^{(q)}(x)\, r^q + \int\limits_{|\varsigma|\le R} K_q(y;\varsigma)\, d\mu(\varsigma),$$

що доводить теорему 2. ■

Доведемо аналог теореми 2 для δ-субгармонійних функцій.

Нехай w – δ-субгармонійна функція, μ_w – розподіл мас, асоційованих за Ріссом з функцією w, а $\mu_w = \mu_w^+ - \mu_w^-$ – розклад Жордана [9, с. 482] μ_w.

Для довільного розподілу мас μ в R^m приймемо

$$N(r,\mu) = d_m \int\limits_0^r \frac{n(t,\mu)}{t^{m-1}} dt,$$

де $n(t,\mu) = \int\limits_{|\tau|\le t} d\mu(\tau)$.

Функція

$$T(r,w) = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{S^m} w^+(r\eta)\, dS(\eta) + N\left(r, \mu_w^-\right),$$

$0 \notin \operatorname{supp} \mu_w$,

називається характеристикою Неванлінни δ-субгармонійної в R^m функції w, $w(0) = 0$.

Теорема 3. *Нехай $w = u_1 - u_2$, $w(0) = 0$, – δ-субгармонійна в R^m, $m \ge 3$, функція скінченного порядку $\beta \ge 0$, $[\beta] = q$ і $\mu_1 = \mu_{u_1}, \mu_2 = \mu_{u_2}$. Тоді*

$$w(y) = J_q(y;\mu_1) - J_q(y;\mu_2) + P(y),$$

де P – гармонійний многочлен степеня, який не перевищує q.

☐ *Доведення.* Виберемо неціле число $\beta^* > \beta$ так, щоб $[\beta^*] = q$. Оскільки $N(r, \mu_2) \le T(r, w) = O\left(r^{\beta^*}\right)$, $r \to \infty$, то на підставі наслідку 1 з [4] існує субгармонійна функція u_2 така, що $T(r, u_2) = O\left(r^{\beta^*}\right)$, $r \to \infty$, і $\mu_{u_2} = \mu_2$. З теореми 2 випливає, що

$$u_2(y) = J_q(y, \mu_2) + \overline{P}(y),$$

де $\overline{P}$ – гармонійний многочлен степеня, що не перевищує q.

Розглянемо функцію $u_1 = w + u_2$. Вона субгармонійна, крім того, $\mu_{u_1} = \mu_1$ і порядок функції u_1 завдяки вибору числа β^* дорівнює β. За теоремою 2

$$u_1(y) = J_q(y, \mu_1) + B(y),$$

де B – гармонійний многочлен степеня, що не перевищує q.

Враховуючи рівність $w = u_1 - u_2$, отримуємо твердження теореми. ■

Література

[1] Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

[2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Ч 2. – М.: Наука, 1974. 296 с.

[3] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

[4] Кондратюк А.А. Сферические гармоники и субгармонические функции // Мат. сб., Т.125(167), N 2, 1984. – С. 147–166.

[5] Veselovska O. Generalization of Weierstrass Canonical Integrals // CEJM. – 2004 - N 2(4) – 593–604.

[6] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ. – М.: Мир, 1974. – 331 с.

[7] H. Berens, P.L. Butzer, S. Pawelke: Limitierungs verfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten // *Publs. Res. Inst. Math. Sci.*, 4, 1968, 201–268.

[8] Кондратюк А.А. О методе сферических гармоник для субгармонических функций // Мат. сб., Т.116(168), N 2, 1981. – С. 147 – 165.

[9] Шварц Л. Анализ. Т 1. – М.: Мир, 1972. – 824 с.

ANOTHER PROOF OF BRELOT-HADAMARD THEOREM FOR SUBHARMONIC FUNCTIONS IN SPACE OF FINITE ORDER

V.V. Dostoyna, O.V. Veselovska

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

We give another proof of Brelot-Hadamard reprecentation for subharmonic functions in space of finite order and its analog for δ-subharmonic functions.

Keywords: subharmonic function, finite order, Nevanlinna characteristic, Brelot-Hadamard reprecentation

2000 MSC: 31B05

UDK: 517.57