ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 601, 2007, с. 43–45

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 601, 2007, p. 43–45

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З АЛГЕБРОЇДНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

А.З. Мохонько, Л.І. Коляса

Національний університет "Львівська політехніка"
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 11 жовтня 2007 р.)

Встановлюється зв'язок між швидкістю зростання алгеброїдних розв'язків і коефіцієнтів лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку.

Ключові слова: скінченний порядок росту, лінійно незалежні розв'язки, неванліннівські характеристики

2000 MSC: 34M05, 34M10

УДК: 517.925.6, 517.534.4

У роботі [1] доведена теорема: нехай всі коефіцієнти диференціального рівняння

$$\begin{gathered} w^{(n)} + a_{n-1}(z)\, w^{(n-1)} + \ldots + a_{\mu+1}(z)\, w^{(\mu+1)} + \\ + a_{\mu}(z)\, w^{(\mu)} + \ldots + a_0(z)\, w = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

є цілими функціями, причому $a_{n-1}(z), \ldots, a_{\mu+1}(z)$, $z \in \mathbf{C}$, – многочлени, $a_{\mu}(z)$, $z \in \mathbf{C}$, – трансцендентна функція. Тоді рівняння (1) має не більше ніж μ лінійно незалежних цілих розв'язків скінченного порядку.

Для неванліннівської характеристики многочлена $a(z)$, $z \in \mathbf{C}$, існує співвідношення $m(r,a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \left|a\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi = O(\ln r)\,, r \to +\infty$.

Далі усі співвідношення, які містять символи Ландау $O(\ldots), o(\ldots)$, розглядаються при $r \to +\infty$. Ціла трансцендентна функція $f(z)$, $z \in \mathbf{C}$, має в ∞ істотно-особливу точку і для неї виконується $m(r,f)/\ln r \to +\infty, r \to +\infty$ [2, с. 40, 50].

У термінах неванліннівських характеристик згадану теорему можна сформулювати у загальній формі: нехай коефіцієнти $a_i(z)$, $z \in \mathbf{C}, i = 0, 1, \ldots, n-1$, рівняння (1) є мероморфними функціями, такими, що

$$\begin{gathered} m(r, a_{n-1}) = O(\ln r)\,, m(r, a_{n-2}) = \\ = O(\ln r)\,, \ldots, m(r, a_{\mu+1}) = O(\ln r)\,, \end{gathered}$$

$$m(r, a_{\mu}) \neq O(\ln r)\,.$$

Тоді рівняння (1) має не більше ніж μ лінійно незалежних мероморфних розв'язків скінченного порядку.

У цій роботі доведено, що аналогічне твердження виконується і тоді, коли коефіцієнти і розв'язки рівняння (1) належать полю алгеброїдних функцій. Нагадаємо деякі означення та властивості алгеброїдних функцій. Розглянемо рівняння

$$P_0 u^{\nu} + \ldots + P_{\nu-1} u + P_{\nu} = 0, \tag{2}$$

де $P_j(z)\,, z \in \mathbf{C},\ j = 0, 1, \ldots, \nu,$ – цілі функції. Розв'язок $u = u(z)\,, z \in \mathbf{C}$, рівняння (2) є ν-значна алгеброїдна функція. Якщо в (2) $\nu = 1$, то це рівняння визначає мероморфну функцію. Отже, якщо через M позначити поле мероморфних функцій, а через A – множину всіх алгеброїдних функцій, то $M \subset A$; множина A теж є полем [3]. Особливими точками алгеброїдної функції є ізольовані критичні алгебраїчні точки та полюси (можливо, нескінченна їх кількість). Нехай $\{c_{\mu}\}$ – множина точок розгалуження алгеброїдної функції $u(z)$. У деякому околі $g = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ точки z_0, $z_0 \in \mathbf{C} \backslash \{c_{\mu}\}$, існує k однозначних віток $u_1(z), \ldots, u_{\nu}(z)$, $z \in g$, які мають розвинення $u_j(z) = \sum\limits_{n=t}^{\infty} a_{jn}(z - z_0)^n, z \in g$, і які задовольняють рівняння (2) в g. Функції $u_1(z), \ldots, u_{\nu}(z)$, $z \in g$ називаються правильними елементами з центром в точці z_0. Якщо рівняння (2) незвідне над полем мероморфних функцій, то правильний елемент $u_1(z)$ можна аналітично продовжити в будь-який інший правильний елемент вздовж деякої кривої. У площині $\mathbf{C}$ з точок $c_{\mu} = r_{\mu} e^{i\varphi_{\mu}} \in \{c_{\mu}\}$ проведемо розрізи вздовж променів $\left\{z : z = \rho e^{i\varphi_{\mu}},\ r_{\mu} \le \rho < +\infty\right\}$ так, щоб внаслідок цих розрізів утворилась однозв'язна область Δ. Правильний елемент $u_j(z)\,, z \in g$, алгеброїдної функції $u(z)\,, z \in \mathbf{C}$, можна аналітично продовжити на всю область Δ і одержати однозначну мероморфну в Δ функцію (однозначну вітку алгеброїдної функції $u(z)\,, z \in \mathbf{C}$), яку позначимо так само, як початковий елемент, через $u_j(z)\,, j = 1, \ldots, \nu$. Через $n(r, u)$ позначимо кількість полюсів функції $u(z)\,, z \in \mathbf{C}$ в крузі $\{z : |z| \le r\}$; кожен полюс враховується стільки разів, яка його кратність.

Розглянемо неванліннівські характеристики алгеброїдної функції $u(z), z \in \mathbf{C}$ [2, с. 27, 4]:

$$N(r,u) = \frac{1}{\nu}\int\limits_0^r (n(t,u) - n(0,u))\, t^{-1} dt,$$
$$m(r,u) = \frac{1}{2\pi\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \left|u_j\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta,$$
$$T(r,u) = m(r,u) + N(r,u),$$

$\ln^+ x \overset{\text{def}}{=} \max(\ln x, 0), x \geq 0$; $x^+ = \max(x, 0), x \geq 0$.

Порядок $\rho[u]$ алгеброїдної функції $u(z)$, $z \in \mathbf{C}$, за означенням дорівнює: $\rho[u] = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \ln T(r,u)/\ln r$.

Якщо $u(z)$, $z \in \mathbf{C}$, алгеброїдна функція порядку $\rho < \infty$, то для будь-якого ε, $0 < \varepsilon < 1$, справедлива нерівність [5]

$$m\left(r, \frac{u^{(k)}}{u}\right) \leq (2\rho - 1 + \varepsilon)^+ k \ln r + O(1),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

а для всіх r, крім, можливо, множини E скінченної логарифмічної міри ($\int\limits_E \frac{dr}{r} < +\infty$), справедлива точніша оцінка

$$m\left(r, \frac{u^{(k)}}{u}\right) \leq (\rho - 1 + \varepsilon)^+ k \ln r + O(1), \quad r \notin E \subset [0, +\infty). \tag{4}$$

Якщо $u, v \in A$, то для неванліннівських характеристик виконуються нерівності [3]

$$\begin{gathered} m(r, u+v) \leq m(r,u) + m(r,v) + \ln 2, \\ m(r, u\cdot v) \leq m(r,u) + m(r,v), \\ T\left(r, \frac{u}{v}\right) \leq T(r,u) + T(r,v) + O(1). \end{gathered} \tag{5}$$

Якщо ν-значна алгеброїдна функція $u(z), z \in \mathbf{C}$, має порядок $\rho[u] < +\infty$, то для похідної $u'(z), z \in \mathbf{C}$, виконується нерівність [6]

$$T(r, u') \leq (2\nu + o(1))\, T(r,u). \tag{6}$$

Теорема 1. *Нехай дано диференціальне рівняння*

$$\begin{gathered} y^{(n)} + a_{n-1}(z)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{\mu+1}(z)\, y^{(\mu+1)} + \\ + a_\mu(z)\, y^{(\mu)} + \ldots + a_0(z)\, y = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

де $a_{n-1}(z), \ldots, a_0(z), z \in \mathbf{C}$, *– алгеброїдні функції, такі, що*

$$\begin{gathered} m(r, a_{n-1}) \leq (k_{n-1} + o(1)) \ln r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m(r, a_1) \leq (k_1 + o(1)) \ln r \end{gathered} \tag{8}$$

при $r \to \infty$, $k_j < \infty$, $1 \leq j \leq n-1$. *Позначимо*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m(r, a_0)}{\ln r} = \alpha. \tag{9}$$

Нехай для деякого $q \geq 0$ *виконується нерівність*

$$\alpha > (2q+1)\, n\frac{(n+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} k_j. \tag{10}$$

Тоді всі алгеброїдні розв'язки (7) мають порядок $\rho[y] > q + 1$.

$\square$ *Доведення.* Доведемо від супротивного. Припустимо, що диференціальне рівняння (7) має хоча б один алгеброїдний розв'язок $y = w(z)$ порядку $\rho[y] \leq q + 1$. Тоді справедлива така нерівність (див. (3)):

$$m\left(r, \frac{w^{(k)}}{w}\right) \leq k(2q + 1 + \varepsilon) \ln r, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{11}$$

З (7) випливає

$$a_0 = -\frac{w^{(n)}}{w} - a_{n-1}\frac{w^{(n-1)}}{w} - \ldots - a_1\frac{w'}{w},$$

звідки, враховуючи (5), (8) і (11), маємо

$$\begin{gathered} m(r, a_0) \leq m\left(r, \frac{w^{(n)}}{w}\right) + m(r, a_{n-1}) + \\ + m\left(r, \frac{w^{(n-1)}}{w}\right) + \ldots + m(r, a_1) + m\left(r, \frac{w'}{w}\right) \leq \\ \leq \ln r \sum_{j=1}^{n-1}(k_j + o(1)) + \sum_{s=1}^{n} m\left(r, \frac{w^{(s)}}{w}\right) = \\ = \ln r \sum_{j=1}^{n-1}(k_j + o(1)) + \ln r\,(2q+1+\varepsilon)(1 + 2 + \ldots + n) = \\ = \ln r \sum_{j=1}^{n-1}(k_j + o(1)) + \ln r\,(2q + 1 + \varepsilon)(n+1)\, n/2, \end{gathered}$$

$$\frac{m(r, a_0)}{\ln r} \leq \sum_{j=1}^{n-1}[k_j + o(1)] + (2q + 1 + \varepsilon)(n+1)\frac{n}{2}.$$

Перейшовши до границі і враховуючи, те що $\varepsilon > 0$ як завгодно мала величина, отримаємо

$$\alpha \leq \sum_{j=1}^{n-1} k_j + (2q+1)\, n\frac{(n+1)}{2},$$

що суперечить (10). $\blacksquare$

Теорема 2. *Нехай дано диференціальне рівняння (7), де* $a_{n-1}(z), \ldots, a_0(z)$, $z \in \mathbf{C}$, *– алгеброїдні функції, такі, що*

$$\begin{gathered} m(r, a_{n-1}) \leq (k_{n-1} + o(1)) \ln r, \ldots, m(r, a_1) \leq \\ \leq (k_1 + o(1)) \ln r,\ r \notin E, \int\limits_E \frac{dr}{r} < +\infty, \end{gathered} \tag{12}$$

при $r \to \infty$, $k_j < \infty$, $1 \leq j \leq n-1$. *Позначимо*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m(r, a_0)}{\ln r} = \alpha,\ r \notin E. \tag{13}$$

Нехай для деякого $q \geq 0$ *виконується нерівність*

$$\alpha > qn\frac{(n+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} k_j. \tag{14}$$

Тоді всі алгеброїдні розв'язки (7) мають порядок $\rho[y] > q + 1$.

□ *Доведення.* Доведемо від супротивного. Припустимо, що диференціальне рівняння (7) має хоча б один алгеброїдний розв'язок $y = w(z)$ порядку $\rho[y] \le q+1$. Тоді справедлива така нерівність (див. (4)):

$$m\left(r, \frac{w^{(k)}}{w}\right) \le k\,(q+\varepsilon)\ln r, \qquad (15)$$
$$r \notin E, \int\limits_E \frac{dr}{r} < +\infty, k \in N.$$

Далі доведення аналогічне доведенню теореми 1, лише замість нерівності (11) використовується нерівність (15). ■

Література

[1] Frei M. Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten, Comment. math. helv. 35, 1961, 201–222.

[2] Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфныхфункций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

[3] Мохонько А.З. Поле алгеброидных функций и оценки их неванлинновских характеристик // Сибирский математич. журн. Сибирское отдел.: Наука, 1981. – с. 214 – 218.

[4] Valiron G. Sur la de'rive'e des fonctions alge'broides // Bull. Soc. math. France. – 1931. – 59, № 1–2.–P. 17–39.

[5] Мохонько В.Д. Лемма о логарифмической производной для алгеброидных функций. Теория ф-ций, функциональный анализ и их приложения. – Вип. 20. – Харьков: Наука, 1974. – С. 112–121.

[6] Ullrich E. Über den EinFlub' der Verzweigtheiteiner Algebroide auf ihre Wertverteilung // J. Reine Angew. Math. 167, 1931, 198–220.

ABOUT SOLUTION OF THE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ALGEBROID COEFFICIENTS

A.Z. Mokhon'ko, L.I. Kolyasa

National University "Lvivska Politekhnika", 12 Bandera St, UA-79013 Lviv, Ukraine

We establish communication between speed of increase of algebroid solutions and coefficients of the linear differential equations of n-th order.

Keywords: finite order of growth, linearly independent solution of equation, Nevanlinna characteristic

2000 MSC: 34M05, 34M10

UDK: 517.925.6, 517.534.4