УДК 621.3

М.В. Говикович, В.І. Горячко
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра ТЗЕ

ЗАСТОСУВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ

Запропоновано вираз енергетичного функціонала для формулювання варіаційної задачі електростатики. Викладено алгоритм розв'язання представленої варіаційної задачі за допомогою поєднання методики інваріантних наближень з методом скінченних елементів.

An expression of energetic functional for formulation of variational problem of electrostatics has been developed. The paper presents the algorithm of solution of the foresaid variational problem based on the fusion of technique of invariant approximations with finite elements method.

Постановка проблеми. Ще 10–15 років тому впровадження варіаційних методів для аналізу електромагнітного поля обмежувалось лише двовимірними задачами, що було зумовлене передусім недостатнім об'ємом пам'яті обчислювальної техніки. З появою нових комп'ютерних технологій застосування варіаційних методів до тривимірних задач стало актуальним і спричинило дослідникам багато цікавих проблем, зокрема питання про побудову оптимальних скінченних елементів (СЕ) для виконання чисельного інтегрування. Питання про те, що можна вважати критерієм оптимальності запропонованого скінченного елемента вирішуємо з точки зору методики інваріантних наближень [1].

Аналіз останніх досягнень та публікацій. Найбільшого поширення в практиці набув варіант методу скінченних елементів, запропонований проф. П. Сільвестром [2]. Характерною особливістю цього методу є використання статичних параметрів для опису властивостей середовища. Отже, цей варіант стає незастосовним для анізотропних нелінійних середовищ, стан яких не може бути визначений лише за модулем напруженості електричного поля чи за модулем магнетної індукції. Методика інваріантних наближень, яку аналізував проф. Р. Фільц, була успішно застосована до аналізу магнетостатичного поля [3] та стаціонарного електричного поля [4], а також задач теорії пружності [5] як в ізотропних, так і в анізотропних нелінійних середовищах методом скінченних різниць.

Задача досліджень. Нашим завданням є формулювання варіаційної задачі електростатики та викладення алгоритму її розв'язання на підставі методу скінченних елементів, поєднаного з методикою інваріантних наближень.

Виклад основного матеріалу. У загальному випадку крайова задача математичної фізики формулюється в операторній формі так:

$$Au = f; \qquad u \in D_A; \qquad f \in H, \tag{1}$$

де A – лінійний оператор з областю визначення D_A, щільною в гільбертовому просторі H зі скалярним добутком (,) та нормою $\| \ \|$; f – задана функція, визначена на відкритій обмеженій множині Ω точок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ евклідового простору $\Re^n$ з неперервною за Лівшицем границею Γ; u – шукана функція, визначена на замиканні $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, причому її значення на границі вважається заданим. Якщо оператор A є симетричним додатним оператором, то задачу (1) можна замінити такою варіаційною задачею: знайти елемент $u_0 \in D_A$, що надає мінімального значення функціоналу

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f). \tag{2}$$

Якщо розв'язок шукаємо у енергетичному просторі H_A, утвореному доповненням множини D_A її граничними елементами (тобто $H_A = D_A \cup \Gamma_A$), то такий розв'язок називається узагальненим.

Застосуємо ці загальні положення варіаційного числення до крайової задачі електростатики, яка формулюється так. Маємо область *G* розрахунку поля, всередині якої розподілено електричний заряд з густиною *ρ*, обмеженою границею $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, де Γ_D – частина границі, на якій задано умову Діріхле, а Γ_N – частина границі, на якій задано умову Неймана. Математична модель такої задачі має вигляд

$$div\overline{D} = \rho[\overline{r}]; \qquad \overline{r} \in G \tag{3}$$

$$\overline{E}[\overline{r}] = -grad\varphi; \qquad \overline{r} \in G \cup \Gamma \tag{4}$$

$$\overline{D}[\overline{r}] = \overline{D}[\overline{E}]; \qquad \overline{r} \in G \cup \Gamma \tag{5}$$

$$\varphi[\overline{r}] = \varphi_D; \qquad \overline{r} \in \Gamma_D \tag{6}$$

$$\overline{n}[\overline{r}]\overline{E}[\overline{r}] = E_n; \qquad \overline{r} \in \Gamma_N \tag{7}$$

де $\varphi[\overline{r}]$ – електричний потенціал як шукана скалярна функція радіуса-вектора $\overline{r}$ точки всередині області *G* та на її границі Γ; $\overline{E}[\overline{r}] = \overline{i}E_x + \overline{j}E_y + \overline{k}E_z$ – вектор напруженості електричного поля як шукана векторна функція радіуса-вектора $\overline{r}$ точки всередині області *G* та на її границі Γ; $\overline{D}[\overline{r}] = \overline{i}D_x + \overline{j}D_y + \overline{k}D_z$ – вектор електричного зміщення як шукана векторна функція радіуса-вектора $\overline{r}$ точки всередині області *G* та на її границі Γ; φ_D – задане значення потенціалу на частині Γ_D границі; $\overline{n}[\overline{r}] = \overline{i}n_x + \overline{j}n_y + \overline{k}n_z$ – одиничний вектор, перпендикулярний до границі в точці з радіусом-вектором $\overline{r}$; E_n – задане значення нормальної складової вектора напруженості електричного поля на частині Γ_N границі.

Для отримання виразу енергетичного функціонала скористаємось результатами роботи [6], присвяченій теоретичним засадам варіаційної задачі аналізу електромагнетного поля. В цій роботі запропоновано записати вираз функціонала у вигляді повної енергії електромагнегного поля. Нехай у момент часу $t = t_0$ вектор електричного зміщення довільної точки розглянутого середовища $\overline{D}(t = t_0) = \overline{D}_0[x, y, z]$ і вектор магнетної індукції $\overline{B}(t = t_0) = \overline{B}_0[x, y, z]$. Тоді вираз енергії для довільного моменту часу $t > t_0$

$$W = W_e + W_m + W_t = \int\limits_V dV \int\limits_{\overline{D}_0}^{\overline{D}} \overline{E}\,\overline{dD} + \int\limits_V dV \int\limits_{\overline{B}_0}^{\overline{B}} \overline{H}\,\overline{dB} + \int\limits_{t_0}^{t} dt \int\limits_V \overline{E} \cdot \overline{J} dV, \tag{8}$$

де W – повна енергія в момент часу *t*, яка складається з трьох доданків – енергії електричного поля W_e, енергії магнетного поля W_m та роботи W_t, витраченої на переміщення заряджених частинок; вважається, що в середовищі не виконується механічна робота в переміщення заряджених провідних тіл, провідних контурів зі струмами та частин середовища; $\overline{H}$ – вектор напруженості магнетного поля; $\overline{J}$ – вектор густини електричного струму, що складається зі струму провідності й струму перенесення. Зауважимо, що формула (8) записана для безгістерезисного середовища.

На підставі виразу (8) було отримано формули енергетичних функціоналів для часткових випадків [6] – задачі електростатики, задачі магнетостатики й задачі аналізу стаціонарного електричного поля постійних струмів. Зокрема для задачі електростатики було отримано вираз функціонала у вигляді

$$W_{es} = \int_V dV \int_{grad\varphi_0}^{grad\varphi} \overline{D} \cdot d(grad\varphi) + \int_V \varphi\rho \cdot dV \tag{9}$$

де $\varphi_0[x,y,z]$ – значення електричного скалярного потенціалу у момент часу $t = t_0$. Оскільки ми попередньо обумовили, що середовище є безгістерезисним, то з міркувань зручності можемо прийняти $grad\varphi_0 = 0$. У вказаній роботі [6] було доказано тотожність розв'язку, отриманого при мінімізації функціонала (9), з розв'язком крайової задачі (3)–(7). Мінімізацію функціоналу (9) виконаємо з використанням методики інваріантних наближень.

Ця методика пропонує вибрати за один з критеріїв адекватності чисельного методу його інваріантність. Як відомо, рівняння Максвелла, що описують електромагнітне поле, є тензорними. Це означає, що розв'язки цих рівнянь не залежать від системи координат, в якій вони отримані, що є гарантією їх об'єктивності. Коли ми розв'язуємо крайову задачу чисельно, то можемо отримати розв'язок вищого або нижчого рівня точності (внаслідок використання певної густоти накладеної сітки, застосування різницевих аналогів певного порядку, припинення ітераційної процедури при досягненні уточнення певного порядку тощо), але ми не повинні втрачати тензорний характер рівнянь, тобто сформована система скінченних рівнянь повинна давати однаковий розв'язок при застосуванні різних систем координат. Оскільки чисельні методи розрахунку базуються на використанні степеневих поліномів, то методика інваріантних наближень пропонує використовувати лише ті поліноми, які не змінюють свого вигляду при зміні системи координат. З міркувань зручності було вибрано многочлени Тейлора. Оскільки тривимірний многочлен Тейлора *n*-го степеня містить $P = (n+3)!/(n!3!)$ елементів, то для апроксимації функції всередині скінченного елемента СЕ повинен складатися з *P* вузлів, які не можуть належати одній поверхні *n*-го порядку (такий комплект вузлів було названо невиродженим). Заповнимо область *G* розрахунку поля сукупністю *M* скінченних елементів *n*-го порядку. Нехай ми отримали *K* внутрішніх вузлів (розташованих всередині області *G*), *Z* граничних вузлів, що належать частині Γ_D границі, та *N* граничних вузлів, що належать частині Γ_N границі. Кожному СЕ присвоїмо порядковий номер, біжуче значення якого позначатимемо буквою *m (m=1, ..., M)*. Кожному вузлу *m*-го СЕ присвоїмо подвійний індекс, перша частина якого вказує на номер СЕ, а друга – на порядковий номер *p (p=1, ..., P)* вузла в цьому елементі. Таку подвійну нумерацію вузлів називатимемо локальною. Вузли граней сусідніх СЕ суміщаються, тому число реальних вузлів області *G* є набагато меншим від добутку $M \times P$. Кожному реальному вузлу присвоїмо також одноіндексний порядковий номер, біжуче значення якого позначатимемо буквою *k (k=1, ..., K+N+Z)*. Таку нумерацію вузлів називатимемо базовою. Для локальної нумерації користуватимемось нижніми індексами, а для базової – верхніми.

Замінимо у функціоналі (9) інтегрування по об'єму додаванням по скінченних елементах згідно з виразом

$$W_{es} = \sum_{m=1}^{M} W_m = \sum_{m=1}^{M} (\int_{V_m} dV_m \int_0^{grad\varphi} \overline{D} \cdot d(grad\varphi) + \int_{V_m} \varphi\rho \cdot dV_m), \tag{10}$$

де V_m – об'єм *m*-го скінченного елемента.

Використавши формули чисельного інтегрування по об'єму *m*-го скінченного елемента, маємо

$$W_{es} = \sum_{m=1}^{M} W_m = \sum_{m=1}^{M} \sum_{p=1}^{P} q_{mp} (\int_0^{grad\varphi_{mp}} \overline{D}_{mp} \cdot d(grad\varphi_{mp}) + \varphi_{mp}\rho_{mp}), \tag{11}$$

де q_{mp} – коефіцієнти, що мають розмірність об'єму і залежать винятково від геометрії *m*-го СЕ; $\overline{D}_{mp}, \varphi_{mp}, \rho_{mp}$ – значення відповідних величин у *p*-му вузлі *m*-го СЕ.

Розподіл будь-якої змінної, що характеризує електричне поле, апроксимується в межах СЕ многочленом Тейлора *n*-го степеня у вигляді, запропонованому методикою інваріантних наближень

$$D_x[x,y,z] = \vec{T}T_m^{-1}\vec{D}_{xm} = \vec{K}[x,y,z]\vec{D}_{xm}\,; \quad D_y[x,y,z] = \vec{T}T_m^{-1}\vec{D}_{ym} = \vec{K}[x,y,z]\vec{D}_{ym}\,;$$

$$D_z[x,y,\,z] = \vec{T}T_m^{-1}\vec{D}_{zm}[x,y,\,z]\,; \quad \varphi[x,y,z] = \vec{T}T_m^{-1}\vec{\varphi}_m = \vec{K}[x,y,z]\vec{\varphi}_m\,;$$

$$grad\varphi[x,y,z] = \vec{T}\overline{N}T_m^{-1}\vec{\varphi}_{xm} = \overline{\vec{R}}_m[x,y,z]\cdot\vec{\varphi}_m\,, \tag{12}$$

де $\vec{T}$ – вектор Тейлора точки, що знаходиться в межах *m*-го скінченного елемента; T_m^{-1} – обернена матриця Тейлора *m*-го скінченного елемента; $\vec{D}_{xm}$, $\vec{D}_{ym}$, $\vec{D}_{zm}$, $\vec{\varphi}_m$ – вузлові стовпці *m*-го скінченного елемента; $\overline{N} = \bar{i}N_x + \bar{j}N_y + \bar{k}N_z$ – матриця Гамільтона; $\overline{\vec{R}}_m = \bar{i}\vec{R}_{xm} + \bar{j}\vec{R}_{ym} + \bar{k}\vec{R}_{zm}$ – різницевий аналог оператора Гамільтона для точки, що знаходиться в межах *m*-го скінченного елемента. Для обчислення різницевих аналогів оператора Гамільтона у вузлах доцільно скористатись локальною системою координат *m*-го СЕ, в якій початок системи координат розташований у даному вузлі, оскільки при цьому його вектор Тейлора має лише один ненульовий елемент – перший.

Знайдемо похідну вкладу *m*-го СЕ по його вузлових потенціалах у вигляді вектора-рядка

$$\vec{\vartheta}_{mm} = \partial W_m / \partial\vec{\varphi}_m = \sum_{p=1}^{P} q_{mp}\frac{\partial}{\partial\vec{\varphi}_m}\Big(\int_0^{grad\varphi_{mp}}\overline{D}_{mp}\cdot d(grad\varphi_{mp}) + \rho_{mp}\vec{K}_{mp}\vec{\varphi}_m\Big) = \sum_{p=1}^{P} q_{mp}((\bar{i}D_{xm} + \bar{j}D_{ym} + \bar{k}D_{zm})$$

$$d(\overline{\vec{R}}_{mp}\cdot\vec{\varphi}_m)/d\vec{\varphi}_m + d(\rho_{mp}\vec{K}_{mp}\vec{\varphi}_m)/d\vec{\varphi}_m) = \sum_{p=1}^{P} q_{mp}(D_{xmp}\vec{R}_{xmp} + D_{ymp}\vec{R}_{ymp} + D_{zmp}\vec{R}_{zmp} + \rho_{mp}\vec{K}_{mp})\,.$$

Для знаходження мінімуму функціонала (11) ми повинні прирівняти до нуля його похідні по значенню потенціалу в кожному реальному вузлі, що не належить границі області розрахунку, тобто у вузлах з номерами *k=1, ..., K*. Оскільки вузол з базовим номером *k* може входити в декілька примикаючих СЕ (тобто номер *k* в базовій нумерації може відповідати кільком різним *mp* в локальній нумерації), то похідна енергетичного функціонала по електричному потенціалу *k* містить вклади від кількох різних СЕ. Таким чином ми отримаємо *K* рівнянь з *K*+*N* невідомим значеннями потенціалу. Ці рівняння доповнимо *N* рівняннями, в яких записана умова Неймана для *N* граничних вузлів. Отриману систему нелінійних рівнянь пропонується розв'язати методом Ньютона, який вимагає обчислення матриці Якобі на кожному кроці ітерації. Для прикладу продемонструємо, як записується вираз похідної вектора-рядка $\vec{\vartheta}_{mm}$ по вузлових потенціалах *m*-го СЕ:

$$d\vec{\vartheta}_{mm}/d\vec{\varphi}_{mT} = -\sum_{p=1}^{P} q_{mp}(\vec{R}_{xmpT}(\varepsilon_{xxmp}\vec{R}_{xmp} + \varepsilon_{xymp}\vec{R}_{ymp} + \varepsilon_{xzmp}\vec{R}_{zmp}) +$$

$$+\vec{R}_{ympT}(\varepsilon_{yxmp}\vec{R}_{xmp} + \varepsilon_{yymp}\vec{R}_{ymp} + \varepsilon_{yzmp}\vec{R}_{zmp}) + \vec{R}_{zmpT}(\varepsilon_{zxmp}\vec{R}_{xmp} + \varepsilon_{zymp}\vec{R}_{ymp} + \varepsilon_{zzmp}\vec{R}_{zmp})\,,$$

де *T* – символ транспонування; $\varepsilon_{jkmp} = \partial D_{jmp}/\partial E_{kmp}$ *(j, k=x, y, z)* – елементи матриці диференційної діелектричної проникності.

Висновки. Запропонований метод розв'язання варіаційної задачі електростатики застосовний до безгістерезисних анізотропних нелінійних середовищ, оскільки для характеристики середовища використовує диференційну діелектричну проникність. Інваріантність результатів забезпечується використанням для внутріелементної апроксимації многочленів Тейлора.

1. Фільц Р.В. Дискретний аналог оператора Гамільтона // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1988. – Вип. 24. – С. 20–25. 2. Silvester P., Chari M. V. K. Finite element solution of saturable magnetic field problem // IEE Transactions. Power apparatus and systems. – 1970. – Vol. PAS-89. – P. 1643–1651. 3. Kotsyuba-Howykowycz M. Application of methodology of invariant approximations to magnetic circuit analysis // International Symposium on Signals, Circuits and Systems. – 2005. – P. 585–588.

4. Howykowycz M. Application of invariant approximations technique to electrical field analysis // Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering. – 2006. – P. 864–867. 5. Howykowycz M., Filc R. On difference approximation of biharmonic operator on a regular triangular grid // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science. – 2008. – P. 63–66. 6. Говикович М., Фільц Р. Теоретичні засади варіаційної задачі аналізу електромагнетного поля. Ч. 1 // Теоретична електротехніка. – 2008. – Вип. 59. – С. 87–96.

УДК 621.316.11:621.67

П.Ф. Гоголюк, Т.М. Гречин, В.Г. Лисяк
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ЕПМС

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УСТАЛЕНИХ РЕЖИМІВ ВУЗЛА НАВАНТАЖЕННЯ ЕЛЕКТРОПОСТАЧАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З БЛОЧНИМ ПОМПОВИМ АГРЕГАТОМ

Створено математичну модель для аналізу усталених режимів вузла навантаження електропостачальної системи з блочним відцентровим помповим агрегатом із асинхронним електродвигуном. Отримано залежності напруги та частоти напруги живлення електродвигуна від продуктивності помпи з метою формування функцій частотного керування електродвигуном автоматичної системи керування агрегату.

Mathematical model intended for analysis of steady-state processes in element of load in electric power distribution system with block centrifugal pump apparatus with electric asynchronous motor is created. Dependencies of electric motor voltage and frequency on pump productivity in order to form frequency control function of electric motor automatic control system were obtained.

Постановка проблеми. Неперервне зростання вартості енергоресурсів спонукає інтенсивно розробляти й впроваджувати всі можливі засоби їхнього ощадливого використання. Зокрема, це істотно стосується потужних помпових станцій, де автоматичні системи керування продуктивністю відцентрових помп лише впроваджуються. На сучасному етапі розвитку математичного моделювання відсутні ефективні моделі низки електроприймачів, які складаються з нерозривно пов’язаних між собою пристроїв різної фізичної природи. Це не дозволяє здійснювати комплексний аналіз режимів і процесів підсистем інженерного забезпечення промислових і цивільних об’єктів з урахуванням їх нелінійних характеристик і взаємного зв’язку, оскільки ускладнює розроблення прикладного математичного та програмного забезпечення автоматизованих систем проектування електропостачальних систем (ЕПС). Зокрема, відсутня ефективна математична модель вузла навантаження з блочним відцентровим помповим агрегатом із асинхронним електродвигуном, яка дозволяла б безпосередньо враховувати взаємний вплив не лише енергетичних, а й гідравлічних і електромагнітних параметрів.

Аналіз результатів останніх досліджень та публікацій. За останні роки було створено математичні моделі самих відцентрових помп (ВП) на підставі принципу електрогідравлічної аналогії, а також, на їх підставі – математичні моделі агрегатів асинхронний двигун (АД) – відцентрова помпа [1,2]. Крім того, фірмою DHI WATER ENVIRONMENT розроблено програмний комплекс MIKE NET, призначений для моделювання режимів і процесів у системах питного