УДК539.9

Б. І. Сокіл, М. Б. Сокіл*
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра механіки та автоматизації машинобудування,
*кафедра транспортних технологій

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ГНУЧКИХ ТРУБЧАСТИХ ТІЛ, ВЗДОВЖ ЯКИХ РУХАЄТЬСЯ СУЦІЛЬНИЙ ПОТІК СЕРЕДОВИЩА

Розроблено методику дослідження вимушених коливань трубчастих тіл малої згинної жорсткості, вздовж яких рухається зі сталою швидкістю суцільний потік однорідного середовища. Методика ґрунтується на поєднанні хвильової теорії руху та асимптотичних методів нелінійної механіки. Отримано співвідношення, які описують основні параметри динамічного процесу для як нерезонансного, так і резонансного випадків.

Ключові слова: нелінійні коливання, дисперсійне співвідношення, хвильове число, частота.

B. Sokil, M. Sokil

FORCED OSCILLATIONS OF THE TUBULAR BODY ALONG WHICH MOVES A CONTINUOUS FLOW HOMOGENOUS ENVIRONMENT

The method study of forced oscillations of the tubular body low bending stiffness along which moves at a constant speed continuous flow homogenous environment. The technique is based on a combination of the wave theory of motion and asymptotic methods of nonlinear mechanics. Correlations describing the basic parameters of the dynamic process for non-resonant and resonant cases.

Keywords: nonlinear vibrations, dispersion relation, wave number, frequency.

Формування проблеми. Гнучкі трубчасті тіла, вздовж котрих переміщується суцільний потік середовища, широко застосовуються у різних галузях машинобудування та промисловості для: вібраційного транспортування сипких середовищ, перекачування рідин; забезпечення функціонування гідро- та пневмоприводів. Переміщення середовища вздовж трубчастого тіла спричиняє зміну основних параметрів, які описують коливальний процес тіла, а також впливає навіть на стійкість динамічного процесу трубчастого тіла [1,2]. Причому зміна величини визначальних параметрів динамічного процесу залежить як від швидкості переміщення середовища, так і від його погонної маси. Різні аспекти дослідження впливу суцільного потоку середовища на динаміку тіл, вздовж котрих вони переміщаються, розглядались, наприклад, у [3–5]. Однак більшість результатів та висновки вказаних робіт мають місце за певних обмежень, які стосуються погонної маси чи відносної швидкості руху середовища та ін. Це певною мірою зменшує вагомість отриманих результатів. Тому метою роботи є розв’язання подібного типу задач за відсутності наведених обмежень щодо середовища. В основу проведених досліджень покладено: ідею описання динаміки суцільних середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом, у вигляді суперпозиції прямої та відбитої хвиль [1]; принцип одночастотності коливань у нелінійних системах із багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами [7]; узагальнення основних положень асимптотичних методів КБМ [7] на нові класи систем. У сукупності наведене дало змогу отримати двопараметричну множину розв’язків, які описують визначальні параметри досліджуваного об’єкта для як нерезонансного, так і резонансного випадків.

Постановка задачі та методика розв'язування. Відомо [1], що математичною моделлю коливань трубчастого тіла малої згинної жорсткості, яке взаємодіє пружною основою і вздовж котрого рухається із сталою за величиною швидкістю суцільний потік однорідного середовища, є диференціальне рівняння

$$L(u(x,t)) = u_{tt}(x,t) + \frac{1}{m_1+m_2}\left(2m_2Vu_{xt}(x,t) - \left(S - m_2V^2\right)u_{xx}(x,t) + cu(x,t)\right) = ef\left(u, u_x, u_t, q\right),$$

$$q = mt + q_0 \quad (1)$$

У (1) $u(x,t)$ – відхилення від рівноважного положення поперечного перерізу із координатою x в довільний момент часу t; m і q_0 відповідно частота та початкова фаза зовнішнього періодичного збурення; m_1 та m_2 маса одиниці довжини трубчатого тіла та суцільного середовища; V – швидкість руху середовища вздовж трубчатого тіла; S – сила попереднього його натягу; c – коефіцієнт жорсткості пружної основи за умови, що її пружні властивості описуються лінійним законом, $ef\left(u, u_x, u_t, q\right)$ – $2p$ – періодична за q функція , що описує реально існуючі нелінійні сили системи та зовнішнє періодичне збурення, e – малий параметр. Вважають, що: а) у недеформованому положенні трубчате тіло прямолінійної форми, а пружна основа – плоска; б) максимальне значення нелінійних сил є малою величиною порівняно із max $\dfrac{2m_2Vu_{xt}(x,t)}{m_1+m_2}$ та max $\left(S - m_2V^2\right)u_{xx}(x,t)$; в) переміщення кінців трубчастого тіла відсутні, тобто для рівняння (1) справджуються однорідні крайові умови

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Задача полягає у визначені впливу основних зовнішніх та внутрішніх чинників системи трубчасте тіло – суцільний потік однорідного середовища на закони зміни визначальних параметрів коливань тіла.

Виходячи із обмежень щодо правої частини диференціального рівняння (1), для дослідження динамічного процесу розглядуваної системи використаємо основні ідеї методів збурень, точніше методу КБМ [7]. Простіші методи, зокрема адаптація основної ідеї методу Ван-дер-Поля чи Бубнова–Гальоркіна для крайової задачі (1) – (2) дає дещо спотворене відтворення розв'язку, а саме, воно не враховує впливу на амплітудо-частотну характеристику збуреного руху другого доданку лівої частини рівняння (1).

Відповідно до загального підходу побудови асимптотичних наближень звичайних рівнянь та рівнянь із частинними похідними насамперед необхідно знайти розв'язок незбуреної ($e = 0$) крайової задачі, яка відповідає сформульованій вище. Незважаючи, що розв'язання для останньої не можна застосувати методи Фур'є та Д'Аламбера, незбурений рух можна трактувати як накладання прямої та відбитої хвиль однакових частот, проте різних довжин [1]

$$\bar{u}(x,t) = a\left(\cos(kx + y) - \cos(cx - y)\right), \; y = wt + j, \quad (3)$$

де k, c – хвильові числа w – частота хвиль, що набувають значення

$$\kappa = \frac{n\pi}{l} + \frac{m_{2.}V}{l\sqrt{S - m_{2.}V^2}}\sqrt{\frac{(n\pi)^2\left(S - m_2V^2\right) + cl^2\left(m_1+m_2\right)}{\left(m_1+m_2\right)\left(S - m_2V^2\right) + \left(m_2V\right)^2}},$$

$$\chi = \frac{n\pi}{l} - \frac{m_2V}{l\sqrt{S - m_2V^2}}\sqrt{\frac{(n\pi)^2\left(S - m_2V^2\right) + cl^2\left(m_2+m_2\right)}{\left(m_2+m_2\right)\left(S - m_2V^2\right) + \left(m_2V\right)^2}}$$

$$w = \frac{\sqrt{\left(S - m_2V^2\right)}}{l}\sqrt{\frac{(np)^2\left(S - m_2V^2\right) + cl^2\left(m_1+m_2\right)}{\left(m_1+m_2\right)\left(S - m_2V^2\right) + \left(m_2V\right)^2}}, \quad (4)$$

а параметри a, j для незбуреного випадку є сталими величинами. Що стосується збуреного руху, то для першого наближення розв’язок рівняння (1) за крайових умов (2) шукатимемо у вигляді

$$\dots u(x,t) = a\left(\cos(kx+wt+j) - \cos(cx-wt-j)\right) + eU(a,x,y,q)\dots, \tag{5}$$

де $U(a,x,y,q)$ є $2p$ – періодичною за аргументами y та q функцією, що задовольняє крайові умови, які випливають із (2), тобто

$$U(a,x,y,q)\big|_{x=0} = U(a,x,y,q)\big|_{x=l} = 0\,. \tag{6}$$

Крім цього, для збуреного руху параметри a та j є невідомими функціями часу. Закони міни їх суттєво залежать від співвідношення між частотами власних та вимушених коливань, тобто між параметрами w та m. Якщо $pw \neq qm$ (нерезонансний випадок, p, q – взаємно прості числа), то параметри a та j зв’язані звичайними диференціальними рівняннями

$$\dot{a} = eA(a), \quad \dot{j} = eB(a)\,. \tag{7}$$

У зоні резонансу динамічний процес значною мірою залежить від різниці фаз $f = y - j$, а закони зміни визначальних параметрів динамічного процесу трубчастого тіла задаються диференціальними рівняннями

$$\dot{a} = e\overline{A}(a,f), \quad f = w - \frac{p}{q}m + e\overline{B}(a,f)\,. \tag{8}$$

Задача полягає у визначенні таких невідомих функцій $A(a)$, $B(a)$ та відповідно $\overline{A}(a,f)$ і $\overline{B}(a,f)$, які із точністю до величин порядку e включно задовольняють вихідне рівняння. Спочатку розглянемо простіший, нерезонансний випадок. Диференціюванням співвідношення (5) за незалежними змінними t та x із урахуванням (7) отримуємо

$$L(U(a,x,f,q)) = w^2\frac{\partial^2 U}{\partial f^2} + m^2\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} + \frac{1}{m_1+m_2}(2Vm_2(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}w + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial q}m) - \left(S - m_1V^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + cU(a,x,f,q)) = \tag{9}$$

$$= f_1(a,x,y,q) - 2\left[a_1\sin(kx+y) + a_2\sin(cx-y)\right]A(a) - 2a\left[a_1\cos(kx+y) - a_2\cos(cx-y)\right]B(a),$$

де $a_1 = w + \dfrac{2m_2Vk}{m_1+m_2}, a_2 = w - \dfrac{2m_2Vc}{m_1+m_2}$, $f_1(a,x,y,q) = f(u,u_x,u_t,q)\Big|_{\substack{u=a(\cos(kx+y)-\cos(cx-y)),\\ u_x=-a(k\sin(kx+y)-c\sin(cx-y)),\\ u_t=-aw(\sin(kx+y)+\sin(cx-y)).}}$.

Для однозначного визначення за диференціальним рівнянням (9) невідомих функцій $A(a)$ та $B(a)$ накладемо додаткові умови на функцію $U(a,x,y,q)$, а саме – її розклад у ряд Фур’є не повинна містити у доданків пропорційних $\sin y$ та $\cos y$. Останнє матиме місце, якщо справджується наступне

$$\int_0^{2p} U_1(a,x,y,q)\begin{Bmatrix}\cos y\\ \sin y\end{Bmatrix}dy = 0. \tag{10}$$

Наведена вище умова еквівалентна вибору як амплітуди хвильового процесу трубчастого тіла амплітуди головної її моди. Одночасно умови (10) дають змогу отримати звичайні диференціальні рівняння, які описують закони зміни в часі параметрів a та j

$$\frac{da}{dt} = eA_1(a) = e\,\frac{\int_0^l\int_0^{2p}\int_0^{2p} f_1(a,x,y,q)\left[(a_1\sin kx + a_2\sin cx)\sin y + (a_1\cos kx - a_2\cos cx)\cos y\right]dy\,dq\,dx}{4p^2 l\left(a_1^2 + a_2^2\right)},$$

$$\frac{df}{dt} = eB_1(a) = e\,\frac{\int_0^l\int_0^{2p}\int_0^{2p} f_1(a,x,y,q)\left[(a_1\sin kx + a_2\sin cx)\sin y - (a_1\cos kx - a_2\cos cx)\cos y\right]dy\,dq\,dx}{4p^2 l\left(a_1^2 + a_2^2\right)a}. \tag{11}$$

Що стосується $U(a,x,y,q)$, то її легко знайти представленням у ряд Фур'є

$$U(a,x,y,q)=\sum_m\sum_n\sum_s U_{mns}(a)\exp i\left(my+nq+s\frac{p}{l}x\right). \qquad (12)$$

Невідомі коефіцієнти $U_{mns}(a)$ цього представлення визначаються правою частиною диференціального рівняння (1) і набувають значення

$$U_{mns}(a)=-\frac{f_{mns}(a)}{m^2w^2+n^2m^2+\frac{1}{m_1+m_2}\left((2Vm_2)\left(\frac{smp}{l}w+\frac{snp}{l}m\right)-\left(S-m_1V^2\right)\left(\frac{sp}{l}\right)+c\right)}, \qquad (13)$$

де $f_{mns}(a)=\int_0^{2p}\int_0^{2p}\int_0^{l}f_1(a,x,y,q)\exp -i\left(my+nq+s\frac{p}{l}x\right)dxdqdy$

Набагато складнішими у дослідженні і одночасно важливішими є дослідження у зоні резонансу. Нижче розглянемо лише випадок головного резонансу: $p=q=1$. Як і для нерезонансного випадку, для визначення невідомих функцій $\bar{A}(a,f)$ і $\bar{B}(a,f)$ отримуємо рівняння

$$L(U)=f_1(a,x,q+f,q)-2[a_1\sin(kx+y)+a_2\sin(cx-y)]\bar{A}(a,f)-2a[a_1\cos(kx+y)-a_2\cos(cx-y)]\bar{B}(a,f)- \qquad (14)$$
$$-\left((\cos(kx+q+f)-\cos(cx-q-f))\frac{\partial\bar{A}(a,f)}{\partial f}+a(\sin(kx+q+f)+\sin(cx-q-f))\frac{\partial B(a,f)}{\partial f}\frac{\partial\bar{B}(a,f)}{\partial f}\right)(w-m)$$

Диференціальне рівняння (14) із урахуванням накладених вище на $U(a,x,f+q,q)$ умов дає змогу отримати співвідношення, які зв'язують шукані функції $\bar{A}(a,f)$ і $\bar{B}(a,f)$

$$\bar{a}_1\bar{A}(a,f)+a\bar{a}_2\bar{B}(a,f)+\left(\bar{b}_1\frac{\partial\bar{A}(a,f)}{\partial f}+a\bar{b}_2\frac{\partial\bar{B}(a,f)}{\partial f}\right)(w-m)=\frac{e}{2p}\int_0^l\int_0^{2p}f_1(a,x,q+f,q)\cos qdqdx, \qquad (15)$$
$$\bar{a}_2\bar{A}(a,f)-a\bar{a}_1\bar{B}(a,f)-\left(\bar{b}_2\frac{\partial\bar{A}(a,f)}{\partial f}-a\bar{b}_1\frac{\partial\bar{B}(a,f)}{\partial f}\right)(w-m)=\frac{e}{2pl}\int_0^l\int_0^{2p}f_1(a,x,q+f,f)\sin qdqdx,$$

де $\bar{a}_1=\frac{1}{2}\int_0^l(a_1\sin kx+a_2\sin cx)dx,\ \bar{a}_2=\frac{1}{2}\int_0^l(a_1\cos kx-a_2\cos cx)dx,\ \bar{b}_1=\frac{1}{2}\int_0^l(\cos kx-\cos cx)dx,$

$\bar{b}_2=\frac{1}{2}\int_0^l(\sin kx+\sin cx)dx.$

Інтегрувати для загального вигляду функції $f(u,u_x,u_t,q)$ систему рівнянь (15) не вдається, тому для дослідження резонансних явищ у вказаному випадку можна використати якісні методи диференціальних рівнянь. Нижче наведемо лише прикінцеві залежності, які стосуються нелінійних резонансних коливань системи трубчасте тіло – потік суцільного середовища за дії гармонічної сили, тобто для випадку $f(u,u_x,u_t,q)=F(u,u_x,u_t)+F_0\sin mt$, F_0 – const. Відповідно до отриманого вище, резонансні коливання розглядуваної системи описуються залежністю

$$u(x,t)=a(\cos(kx+mt+f)-\cos(cx-mt-f)), \qquad (16)$$

в якій a та f визначаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt}=eA(a)+\frac{eF_0}{2pl\left(a_1^2+a_2^2\right)}(\bar{a}_1\cos f-\bar{a}_2\sin f),\ \frac{df}{dt}=w-m+eB(a)+\frac{eF_0}{2pl\left(a_1^2+a_2^2\right)a}(\bar{a}_1\cos f+\bar{a}_2\sin f) \qquad (17)$$

де

$$A(a)=\frac{\int_0^l\int_0^{2p}f_1(a,x,y)[(a_1\sin kx+a_2\sin cx)\sin y+(a_1\cos kx-a_2\cos cx)\cos y]dy\,dx}{2pl\left(a_1^2+a_2^2\right)},$$

$$B(a)=\frac{\int\limits_0^l\int\limits_0^{2p} f_1(a,x,y\ )[(a_1\sin kx+a_2\sin cx)\sin y\ -(a_1\cos kx-a_2\cos cx)\cos y\ ]dy\,dx}{2pla\left(a_1^2+a_2^2\right)}. \quad (18)$$

Як приклад розглянемо задачу про вплив на резонансні коливання видовження гнучкого трубопроводу та руху вздовж нього зі сталою швидкістю суцільного потоку однорідного середовища. Математичною моделлю динаміки цього об’єкта буде диференціальне рівняння

$$L(u(x,t))=l\int\limits_0^l (u_x(x,t))^2u_{xx}(x,t)+\frac{d}{m_1+m_2}(u_t(x,t))^{2s+1}+F_0\sin mt \quad (19)$$

за крайових умов (2). У (19) l,d,s – сталі, які характеризують пружні властивості матеріалу гнучкого трубчатого тіла та силу опору. За умови, що максимальне значення правої частини рівняння (19) є малою величиною порівняно із максимальним значенням функції $\frac{1}{m_1+m_2}\left(2m_2Vu_{xt}(x,t)-\left(S-m_2V^2\right)u_{xx}(x,t)\right)$, амплітудо-частотну характеристику резонансних коливань гнучкого трубопроводу опишемо рівняннями

$$\frac{da}{dt}=\frac{1}{2pl\left(a_1^2+a_2^2\right)}\left\{r_1a^{2s+1}+F_0(\bar{a}_1\cos f-\bar{a}_2\sin f)\right\},\mathbf{L}\ \frac{df}{dt}=w-m+\frac{1}{2pal\left(a_1^2+a_2^2\right)}\left\{r_2a^3+F_0(\bar{a}_1\cos f+\bar{a}_2\sin f)\right\},$$

в яких

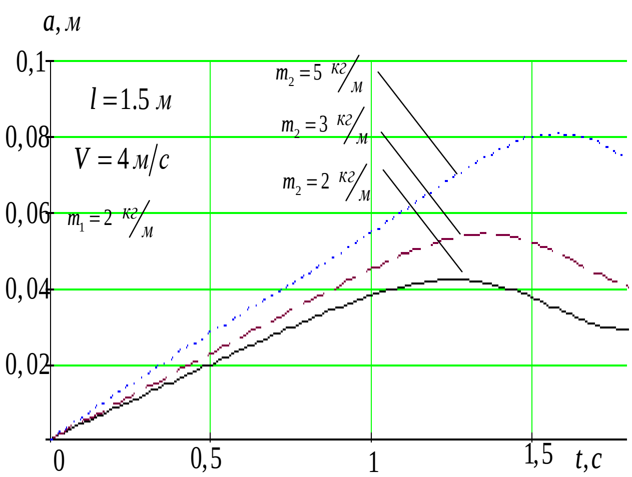
$$r_1=\frac{-dw^{2s+1}}{m_1+m_2}\int\limits_0^{2p}\int\limits_0^l(\sin(kx+y\ )+\sin(cx-y\ ))^{2s+1}[(a_1\sin kx+$$

$$+a_2\sin cx)\sin y\ +(a_1\cos kx-a_2\cos cx)\cos y\ ]dxdy$$

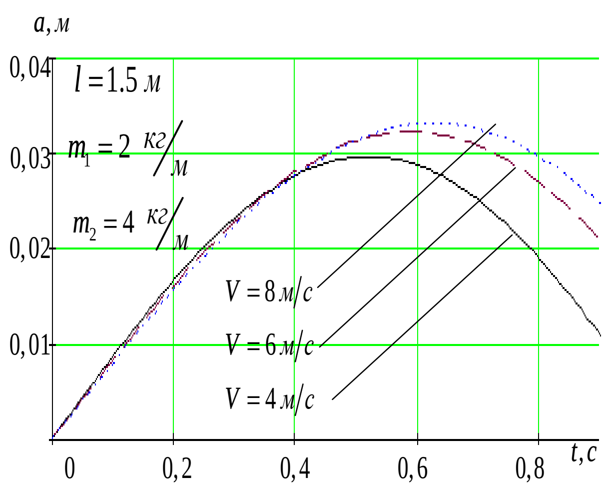
$$r_2=l\int\limits_0^{2p}\int\limits_0^l\left(k^2\cos(kx+y\ )-c^2\cos(cx-y\ )\right)\left[\frac{1}{2l}\int\limits_0^l(k\sin(kx+y\ )-c\sin(cx-y\ ))^2\right]dx\times$$

$$\times[(a_1\sin kx+a_2\sin cx)\sin y\ +(a_1\cos kx-a_2\cos cx)\cos y\ ]dxdy$$

Нижче на рисунку зображено залежності резонансної амплітуди за різних швидкостей руху суцільного середовища.



а



б

Резонансні значення амплітуд для різних погонних мас середовища (а) та різних швидкостей його руху (б)

Висновки. Отримані у роботі результати дають змогу аналітично розв'язати низку практичних задач, які стосуються динаміки гнучких елементів транспортних систем. Вони зокрема показують, що стала складова швидкості руху суцільного середовища вздовж трубчастого тіла зменшує частоту власних коливань останнього, до того ж за більших значень швидкості руху суцільного середовища величина резонансної амплітуди є більшою. Крім цього, для суцільних середовищ більшої погонної маси величина резонансної амплітуди є більшою, а для трубчастого тіла більшої погонної маси – меншою. Що стосується впливу видовження гнучкого тіла за дії обмежених сил натягу, то він проявляється у незначній зміні частоти власних коливань, а отже – в існуванні резонансних коливань за меншої частоти вимушуючої сили.

Достовірність отриманих результатів підтверджується збігом у граничному випадку отриманих розрахункових залежностей із відомими з літератури, які стосуються динаміки поздовжньо рухомих систем (при $m_2 \to 0$) чи нелінійних коливань гнучких елементів (при $V \to 0$).

1. Сокіл Б. І. Нелінійні коливання системи гнучке трубчасте тіло – суцільний потік середовища, що рухається вздовж нього / І. І. Верхола, М. Б. Сокіл, О. І. Хитряк // Науковий вісник НЛТУУ. – Львів: РВВ НЛТУ України, 2016. – Вип. 26.5. – С. 277–282. 2. Шевченко Ф. Л. Влияние скорости протекающей жидкости на устойчивость бурильной колонны / Ф. Л. Шевченко, Ю. В. Петтик // Науковий вісник Національного гірничого ун-ту. – 2010. – № 1. – С. 69–72. 3. Гавриленко В. Вплив сил Коріоліса на динаміку трубопроводу з рідиною при різних способах закріплення / В. В. Гавриленко, О. П. Ковальчук, О. С. Лимарченко // Підводні технології. – 2015/2/. – С. 66–71. 4. Василевський Ю. Є. Механізм втрати нелінійної стійкості трубопроводу з швидкісною течією рідини при різних способах закріплення / Василевський Ю. Є., Лимарченко О. С., Ковальчук О. П. // Комунальне господарство міст: наук.- техн. зб. – Київ–Харків: Основа, 2010. – Вип. 9. – С. 49–56. 5. Кикоть С. В. Коливання криволінійного трубопроводу з рухомою рідиною / С. В. Кикоть // Вісник Національного транспортного університету. – К.: НТУ, 2012. – № 26 (2). – С. 559–564. 6. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 501 с.