ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 601, 2007, с. 40–42

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 601, 2007, p. 40–42

ДЕЯКІ НОВІ РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ АПЕЛЯ F_1 ТА ЛАУРІЧЕЛЛИ $F_D^{(N)}$

О.С. Манзій[a]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 19 червня 2007 р.)

Встановлено та доведено деякі нові рекурентні співвідношення для гіпергеометричних функцій Апеля F_1. Запропонована техніка, що дає можливість записати узагальнену формулу у випадку багатовимірної гіпергеометричної функції Лаурічелли$F_D^{(N)}$. Наведено приклад такої формули у випадку $N=3$.

Ключові слова: гіпергеометрична функція, рекурентне співвідношення, кратний степеневий ряд.

УДК: 517.526.

Гіпергеометрична функція Аппеля $F_1\left(a, b_1, b_2;\, c;\, z_1, z_2\right)$ — одна з чотирьох функцій від двох змінних, що були означені у 1882 році французьким математиком Апелем [1] як узагальнення гіпергеометричної функції Гаусса на випадок двох змінних. Ця функція визначається кратним степеневим рядом такого вигляду:

$$F_1\left(a, b_1, b_2;\, c;\, z_1, z_2\right)=\sum_{m,\ n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}\left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_n}{(c)_{m+n}\, m!n!} z_1^m z_2^n, \tag{1}$$

де $(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)$ — символ Похгаммера, $c \neq 0,-1,-2, \ldots$.

Ряд (1) збігається в полі крузі $\left|z_i\right|<1,\ i=1,2$.

У випадку N змінних аналогічним багатовимірним узагальненням гіпергеометричної функції Гаусса є функція Лаурічелли $F_D^{(N)}\left(a, b_1, b_2, \ldots, b_N; c; z_1, z_2, \ldots, z_N\right)$.

При дослідженні властивостей таких функцій та при побудові і аналізі різних апаратів їх наближень часто використовуються рекурентні співвідношення. У монографіях та довідниках [3] наведені різноманітні рекурентні співвідношення для гіпергеометричних функцій як загального вигляду, так і при певних значеннях їх параметрів.

Сформулюємо та доведемо деякі нові рекурентні співвідношення для гіпергеометричних функцій F_1 та $F_D^{(N)}$.

Твердження 1. Для гіпергеометричної функції F_1 справедливі такі рекурентні співвідношення:

$$\begin{gathered}F_1\left(a, b_1, b_2;\, c;\, z_1, z_2\right)= \\ =\left(1-z_1\right) F_1\left(a, b_1+1, b_2; c;\, z_1, z_2\right)+ \\ +\frac{c-a}{c}\, z_1 F_1\left(a, b_1+1, b_2;\, c+1; z_1, z_2\right),\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}F_1\left(a, b_1, b_2;\, c;\, z_1, z_2\right)= \\ \left(1-z_2\right) F_1\left(a, b_1, b_2+1; c;\, z_1, z_2\right)+ \\ +\frac{c-a}{c}\, z_2 F_1\left(a, b_1, b_2+1;\, c+1; z_1, z_2\right).\end{gathered} \tag{3}$$

$\square$ *Доведення.* Під час доведення використаємо означення гіпергеометричної функції F_1 через кратний степеневий ряд (1). Покажемо, що в лівій та правій частинах формули (2) коефіцієнти розвинення у подвійний степеневий ряд (1) при змінних $z_1^m z_2^n$ збігатимуться.

$$\frac{(a)_{m+n}\left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_n}{(c)_{m+n}\, m!n!}\left[\frac{b_1+m}{b_1}-\frac{(c+m+n-1)\, m}{(a+m+n-1)\, b_1}+\right. \\ \left.+\frac{(c-a)}{c} \frac{c m}{(a+m+n-1) b_1}\right]=\frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n} m!n!}.$$

Отже, розвинення (2) правильне. ■

Аналогічно доводиться справедливість розвинення (3).

Зауваження. Аналогічні рекурентні формули справедливі і для гіпергеометричної функції Лаурічелли $F_D^{(N)}$:

$$F_D^{(N)}\left(a, \bar{b};\, c;\, \bar{z}\right)=\left(1-z_i\right) F_D^{(N)}\left(a, \bar{b}+\bar{e}_i;\, c;\, \bar{z}\right)+ \\ +\frac{c-a}{c} z_i F_D^{(N)}\left(a, \bar{b}+\bar{e}_i;\, c+1;\, \bar{z}\right), \tag{4}$$

де $\bar{b}=\left(b_1, b_2, \ldots, b_N\right)$, $\bar{e}_i=\left(\delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_N^i\right)$, δ_j^i – символ Кронекера, $\bar{z}=\left(z_1, z_2, \ldots, z_N\right)$.

Твердження 2. Для гіпергеометричної функції F_1 справедливе таке рекурентне співвідношення:

$$F_1\left(a, b_1, b_2;\, c;\, z_1, z_2\right)=F_1\left(a+1, b_1, b_2; c;\, z_1, z_2\right)- \\ -\left(\frac{b_1}{c} z_1+\frac{b_2}{c} z_2-\frac{b_1+b_2}{c} z_1 z_2\right) \times$$

$$F_1\left(a+1,b_1+1,b_2+1;\ c+1;\ z_1,z_2\right)- \tag{5}$$
$$-\frac{b_1+b_2}{c+1}z_1z_2F_1\left(a+1,b_1+1,b_2+1;\ c+2;\ z_1,z_2\right).$$

□ *Доведення.* Формулу твердження 2 неважко перевірити аналогічним як і в попередньому випадку методом, проте для подальшого узагальнення формули доведемо її конструктивно. При тому використаємо ще одне рекурентне співвідношення, що доведене в роботі [4] для випадку гіпергеометричної функції Лаурічелли $F_D^{(N)}$. Сформулюємо цей результат для випадку $N=2$.

Для гіпергеометричної функції F_1 справедливе таке рекурентне співвідношення:

$$F_1\left(a,b_1,b_2;\ c;\ z_1,z_2\right)=F_1\left(a+1,b_1,b_2;c;\ z_1,z_2\right)-$$
$$-\frac{b_1}{c}z_1F_1\left(a+1,b_1+1,b_2;c+1;\ z_1,z_2\right)-$$
$$-\frac{b_2}{c}z_2F_1\left(a+1,b_1,b_2+1;c+1;\ z_1,z_2\right). \tag{6}$$

Запишемо співвідношення (2) для функції $F_1\left(a+1,b_1,b_2+1;c+1;\ z_1,z_2\right)$ та (3) для функції $F_1\left(a+1,b_1+1,b_2;c+1;\ z_1,z_2\right)$ і підставимо у співвідношення (6) відповідно, отримаємо:

$$F_1\left(a,b_1,b_2;\ c;\ z_1,z_2\right)=F_1\left(a+1,b_1,b_2;c;\ z_1,z_2\right)-$$
$$-\frac{b_1}{c}z_1\left[(1-z_2)\,F_1\left(a+1,b_1+1,b_2+1;c+1;\ z_1,z_2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{c-a}{c+1}z_2F_1\left(a+1,b_1+1,b_2+1;c+2;\ z_1,z_2\right)\right]-$$
$$-\frac{b_2}{c}z_2\left[(1-z_1)F_1\left(a+1,b_1+1,b_2+1;c+1;\ z_1,z_2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{c-a}{c+1}z_1F_1\left(a+1,b_1+1,b_2+1;c+2;\ z_1,z_2\right)\right]=$$
$$=F_1\left(a+1,b_1,b_2;c;\ z_1,z_2\right)-$$
$$-\left(\frac{b_1}{c}z_1+\frac{b_2}{c}z_2-\frac{b_1+b_2}{c}z_1z_2\right)\times$$
$$F_1\left(a+1,b_1+1,b_2+1;\ c+1;\ z_1,z_2\right)-$$
$$-\frac{b_1+b_2}{c+1}z_1z_2F_1\left(a+1,b_1+1,b_2+1;\ c+2;\ z_1,z_2\right).$$

Формула (5) доведена. ■

Зауважимо, що за допомогою формули (5) можна записати функцію F_1 з від'ємними b_i $(i=1,2)$ через лінійну комбінацію двох функцій F_1 з додатними b_i $(i=1,2)$. Наприклад, у випадку функції $F_1\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};2;z_1,z_2\right)$ існуватиме рівність:

$$F_1\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};2;z_1,z_2\right)=$$
$$1-\frac{1}{3}z_1z_2F_1\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2};4;z_1,z_2\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(z_1+z_2-2z_1z_2\right)F_1\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2};3;z_1,z_2\right). \tag{7}$$

Методика доведення твердження (2) дозволяє вивести формулу, за допомогою якої можна записати функцію $F_D^{(N)}$ з довільними від'ємними b_i $\left(i=\overline{1,\ N}\right)$ через лінійну комбінацію функцій $F_D^{(N)}$ з додатними b_i $\left(i=\overline{1,\ N}\right)$.

Покажемо це на прикладі $N=3$.

Запишемо аналог формули (6) для багатовимірної функції Лаурічелли $F_D^{(N)}$:

$$F_D^{(N)}\left(a,\bar{b};\ c;\ \bar{z}\right)=F_D^{(N)}\left(a+1,\bar{b};\ c;\ \bar{z}\right)-$$
$$-\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{c}z_jF_D^{(N)}\left(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z}\right), \tag{8}$$

а також багатовимірний аналог формул із твердження 1:

$$F_D^{(N)}\left(a,\bar{b};\ c;\ \bar{z}\right)=(1-z_i)\,F_D^{(N)}\left(a,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c;\ \bar{z}\right)-$$
$$-\frac{c-a}{a}F_D^{(N)}\left(a+1,\bar{b}+\bar{e}_i;\ c+1;\ \bar{z}\right). \tag{9}$$

Підставляємо формули (9), записані для параметрів $a+1$, $\bar{b}+\bar{e}_i$, $c+1$, у формулу (8), щоб добитися в результуючій формулі зсуву по всіх параметрах$\bar{b}$+$\bar{e}_i$. Отримуємо:

$$F_D^{(3)}\left(a,b_1,b_2,b_3;\ c;\ z_1,z_2,z_3\right)=$$
$$F_D^{(3)}\left(a+1,b_1,b_2,b_3;\ c;\ z_1,z_2,z_3\right)-$$
$$\frac{1}{c}\left(b_1z_1+b_2z_2+b_3z_3-\left(b_1+b_2\right)z_1z_2-\left(b_2+b_3\right)z_2z_3-\right.$$
$$\left.-\left(b_1+b_3\right)z_1z_3+\left(b_1+b_2+b_3\right)z_1z_2z_3\right)\times$$
$$F_D^{(3)}\left(a+1,b_1+1,b_2+1,b_3+1;\ c+1;\ z_1,z_2,z_3\right)-$$
$$-\frac{c-a}{c\,(c+1)}\left(\left(b_1+b_2\right)z_1z_2-\left(b_2+b_3\right)z_2z_3-\left(b_1+b_3\right)z_1z_3+\right.$$
$$\left.+2\left(b_1+b_2+b_3\right)z_1z_2z_3\right)\times$$
$$F_D^{(3)}\left(a+1,b_1+1,b_2+1,b_3+1;\ c+2;\ z_1,z_2,z_3\right)-$$
$$-\frac{(c-a)\,(c+1-a)}{c\,(c+1)\,(c+2)}\left(b_1+b_2+b_3\right)z_1z_2z_3\times$$
$$F_D^{(3)}\left(a+1,b_1+1,b_2+1,b_3+1;\ c+3;\ z_1,z_2,z_3\right).$$

Гіпергеометричні функції є одними із найпоширеніших спеціальних функцій математичної фізики у застосуваннях. Так, наприклад, гіпергеометрична функція Лаурічелли $F_D^{(N)}$ використовується у розв'язках узагальнених рівнянь Шредінгера, Вебера та ін [2]. Ефективним апаратом наближення гіпергеометричних функцій є гіллясті ланцюгові дроби. У [4] побудовані розвинення функції Лаурічелли $F_D^{(N)}$ у гіллясті ланцюгові дроби з N-гілками розгалуження та доведена їх збіжність у деякій необмеженій області у випадку, коли параметри функції задовольняють певні умови, зокрема $b_i>0$. Отже, отриманий у статті результат дає можливість наближення гіпергеометричної функції $F_D^{(N)}\left(1,-\frac{1}{2},\ldots,-\frac{1}{2};2;z_1,\ldots,z_n\right)$, яка використовується у розв'язку рівняння Вебера, гіллястим ланюговим дробом.

Література

[1] Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polinomes d'Hermite. – Paris: Couthier-Villars, 1926. – 434 p.

[2] Exton H. Multiple hypergeometric functions and applications. – New York-Sydney-Toronto, Chichester, Ellis Horwood, 1976. – 376 p.

[3] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансциндентные функции. – Т.**1**. – М.: Наука, 1973. – 296 с.

[4] Гоєнко Н.П. "Наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли гіллястими ланцюговими дробами" // Дис. ... канд. фіз.-матем. наук. – Львів, – 2003. – 113 с.

THE SOME OF RECURRENCE RELATIONS OF THE GEOMETRIC FUNCTION OF APPELL F_1 AND LAURICELLA $F_D^{(N)}$

O. Manzij[a]

[a] *National University "Lvivska Politechnika", 12 S. Bandera Str., Lviv, UA-79013, Ukraine*

The some of new recurrence relations of the hypergeometric function of AppellF_1 are obtained and proved. Give the method to obtain the generalization of formula in case general geometric function of Lauricella $F_D^{(N)}$. Give the example of formula in case $N = 3$.

Keywords: hypergeometric function, recurrence relations, power series.

UDK: 517.526.