УДК 519.718.2

С.В. Щербовських
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра ЕАП

ОПТИМІЗАЦІЯ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИВАЛІСТЮ ТЕСТУВАННЯ ТА ОБ'ЄМОМ ВИБІРКИ ПІД ЧАС ТЕСТУВАННЯ ОБ'ЄКТІВ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЮ МОДЕЛЛЮ ВІДМОВ

Визначено оптимальне співвідношення між об'ємом вибірки та тривалістю тестування. Оптимальне співвідношення визначено із умови мінімізації витрат на проведення такого тестування. Розглядається тестування об'єктів, напрацювання яких розподілено за експоненціальною моделлю відмов.

The paper is devoted to problem of optimal ratio definitions between sample amount and test duration. The optimal ratio is calculated by minimization cost-function. It's supposed that life items are distributed by exponential failure model.

Постановка проблеми. Електромеханічні системи, на які покладено виконання відповідальних функцій, повинні забезпечувати задані показники безвідмовності. Наближену оцінку таких показників отримують розрахунково, на основі аналізу систем-аналогів та спеціалізованої довідкової літератури, а уточнену – безпосереднім тестування. Під час проведення тестувань похибка та достовірність результату тестування забезпечується певним мінімально необхідним об'ємом вибірки N_{min}, проте, можна накладати додатково такі обмеження.

- Обмеження на час, яке полягає в тому, що тривалість тестування не може перевищувати заданого значення T. За такого обмеження необхідно визначити, до якої величини необхідно збільшити об'єм вибірки, щоб скоротити тривалість тестування до заданого значення.
- Обмеження на об'єм вибірки, яке полягає в тому, що тестується заданий об'єм вибірки ($N>N_{min}$). За такого обмеження необхідно визначити на скільки доцільно скоротити тривалість тестування.

Проблема, якій присвячена стаття, полягає у визначенні оптимального співвідношення між об'ємом вибірки та тривалістю тестування з погляду мінімізації витрат для об'єктів, напрацювання яких розподілено за експоненціальною моделлю відмов.

Вирішення поставленої проблеми забезпечить формування рекомендацій щодо вибору об'єму вибірки та тривалості тестування з метою перевірки параметра експоненціальної моделі відмов. Вибір оптимальних співвідношень, при заданих значеннях похибки та достовірності результатів, забезпечує економію матеріальних ресурсів та часу під час тестування об'єктів.

Аналіз останніх досліджень. Для визначення об'єму вибірки та тривалості тестування існують методи, які ґрунтуються на емпіричних та напівемпіричних аналітичних виразах та таблицях [1–3]. Залежно від мети тестування визначення об'єму вибірки та тривалості тестування істотно різняться, а, для деяких різновидів тестування, такі вирази відсутні. Сьогодні, не існує єдиного методологічного підходу щодо вирішення вказаної проблеми. Подальші дослідження у цьому напрямі мають міждисциплінарний характер і повинні поєднувати різні наукові аспекти, такі як економіка, надійність та математичне моделювання тощо, про що зазначено у [4, 5].

Завдання статті. 1. Сформувати функціонал витрат на проведення тестування. 2. Розробити процедуру обчислення складників функціоналу. 3. Отримати графічні залежності оптимального співвідношення між тривалістю тестування та об'ємом вибірки для експоненціальної моделі відмов.

Виклад основного матеріалу. ***Функціонал витрат на проведення тестування.*** Метою проведення тестування є уточнення числових значень параметра експоненціальної моделі відмов. Співвідношення між об'ємом вибірки N та тривалістю тестування T для проведення тестування визначаємо із умови мінімізації функціоналу витрат. Приймаємо, що функціонал витрат є сумою трьох доданків:

$$Q(N,T) = Q_1(N,T) + Q_2(N,T) + Q_3(N,T). \tag{1}$$

де Q_1 – витрати, пов'язані із напрацюванням об'єктів та засобів діагностики під час тестування; Q_2 – середні витрати через відмови об'єктів під час тестування; Q_3 – середні витрати через недосягнення мети тестування.

Визначимо вираз для обчислення кожного типу із перелічених вище витрат. Приймаємо, що витрати, пов'язані із напрацюванням об'єктів та засобів їх діагностики, визначаються згідно з

$$Q_1(N,T) = q_1 \cdot N \cdot T, \tag{2}$$

де q_1 – витрати на один об'єкт за одиницю часу, пов'язані із напрацюванням власне об'єкта та засобів його технічної діагностики під час тестування.

Такі витрати можуть об'єднувати вартість електроенергії, що споживається об'єктом під час тестування, паливо-мастильних матеріалів, зарплату персоналу, який обслуговує тестування і засоби технічної діагностики об'єктів тощо. Зі збільшенням об'єму вибірки та тривалості тестування такі втрати пропорційно зростають.

Витрати через відмову об'єктів під час проведення тестування визначаємо згідно з

$$\mathrm{Q}_{2K} = q_2 \cdot K, \tag{3}$$

де q_2 – витрати на один об'єкт, пов'язані із відмовою цього об'єкта під час тестування.
K – кількість об'єктів, що відмовили.

Такі витрати можуть містити вартість власне об'єкта, а також витрати, пов'язані із його вилученням із тестування.

Формулу (3) безпосередньо застосувати для визначення такого типу витрат некоректно, оскільки кількість об'єктів, що відмовить під час тестування, є випадковою величиною, яка залежить від об'єму вибірки та тривалості тестування.

Введемо поняття середніх витрат через відмови об'єктів. Такі витрати є сумою доданків. Кожний доданок є добутком витрат через відмову вказаної кількості об'єктів, що множиться на ймовірність появи такої кількості відмов

$$Q_2(N,T) = q_2 \cdot 0 \cdot p_{N,T}(0) + q_2 \cdot 1 \cdot p_{N,T}(1) + \ldots + q_2 \cdot K \cdot p_{N,T}(K) + \ldots + q_2 \cdot N \cdot p_{N,T}(N),$$

де $p_{N,T}(K)$ – функція ймовірності виникнення K відмов у вибірці, що містить N об'єктів і тестується протягом часу T.

Оскільки перший доданок відповідає випадку відсутності відмов, то його у записі опускаємо. Отже, середні витрати через відмови об'єктів у вибірці під час тестування визначаються згідно з

$$Q_2(N,T) = q_2 \cdot \sum_{K=1}^{N} K \cdot p_{N,T}(K). \tag{4}$$

Зі збільшенням об'єму вибірки та тривалості тестування такі втрати мають тенденцію до зростання. Значення функції ймовірності виникнення K відмов у вибірці об'ємом N об'єктів за час T визначаємо так:

$$p_{N,T}(K) = \frac{N!}{(N-K)! \cdot K!} R^{N-K}(T) \cdot (1 - R(T))^K, \tag{5}$$

де R – модель відмов об'єкта, яка задана функцією ймовірності безвідмовної роботи.

Цей вираз відомий у літературі як формула Бернуллі. Результатом проведення тестування є поява на момент часу T не менше N_K кількості відмов у вибірці об'ємом N. Очікуване число відмов

N_K повинно бути не менше за кількість параметрів моделі відмов. Якщо на момент часу T фактична кількість відмов менша за число параметрів, то таке тестування не досягло мети. Вважаємо, що витрати через недосягнення мети тестування становлять q_3. Такі витрати можуть включати повернення вартості проведення тестування, штраф тощо. Оскільки кількість об'єктів, що відмовлять під час тестування, є випадковою величиною, то введемо поняття середніх витрат через недосягнення мети тестування. Ця величина є добутком витрат через недосягнення мети тестування q_3 на імовірність появи за час тестування T, меншого за N_K кількості відмов

$$Q_3(N,T) = q_3 \cdot \left[p_{N,T}(0) + \ldots + p_{N,T}(N_K - 1)\right] = q_3 \left[\sum_{K=0}^{N_K - 1} p_{N,T}(K)\right]. \tag{6}$$

Зі збільшенням об'єму вибірки та тривалості тестування такі втрати мають тенденцію до спадання. Отже, підставивши вирази (2), (4) та (6) у формулу (1), отримаємо функціонал витрат на проведення тестування, який залежить від об'єму вибірки N та тривалості тестування T.

Процедура обчислення коефіцієнтів біноміального розподілу. Обчислення виразів (4) та (6) передбачає обчислення функції ймовірності $p_{N,T}(K)$ згідно з (5). Під час виконання розрахунків за вказаною формулою виникають проблеми обчислювального характеру:

- значення факторіалу від об'єму вибірки $N!$ за певного значення об'єму вибірки стає більшим за верхню допустиму межу;
- під час ділення чисельника $N!$ на знаменник $K!\cdot(N - K)!$ за певних значень об'єму вибірки N та кількості відмов K утворюється відношення двох великих чисел, що спричиняє зменшення точності обчислення через обмежену кількість розрядів.

Для програмного забезпечення, у якому проводилось дослідження, максимально допустиме N становить усього 170 ($170! > 10^{300}$). З метою забезпечення високої точності та достовірності результатів тестування обсяг вибірки може сягати понад 10000. В такому світлі, виникає проблема розробки спеціалізованої обчислювальної процедури, яка б забезпечила високоточний та високоефективний розрахунок функції ймовірності $p_{N,T}(K)$, про що, також, зазначено у [6].

Для усунення зазначених вище проблем пропонується застосувати таку обчислювальну процедуру. Запишемо (5) для випадку K та $(K - 1)$ відмов:

$$\left.\begin{aligned} p_{N,T}(K) &= \frac{N!}{(N-K)!\cdot K!} R^{N-K} \cdot (1-R)^{K}, \\ p_{N,T}(K-1) &= \frac{N!}{(N-K+1)!\cdot(K-1)!} R^{N-K+1} \cdot (1-R)^{K-1}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Оскільки тривалість тестування T тут і у наступних виразах є незмінною, то під час запису її опускатимемо. Візьмемо відношення першого виразу (7) до другого. Як видно із цього відношення, кожне наступне значення виразу (5) відрізняється від попереднього на однаковий множник. Отже, обчислювальна процедура ґрунтується на ітераційному виразі

$$p_{N,T}(K) = p_{N,T}(K-1) \cdot \frac{N-K+1}{K} \cdot \frac{1-R}{R}. \tag{8}$$

Цей вираз послідовно розраховується для значень K у діапазоні від 1 до N. Початкове значення, від якого починається ітераційний процес

$$p_{N,T}(0) = R^N.$$

Застосування виразу (8) вирішує проблему лише частково. Якщо N перевищує допустиме значення, то під час виконання ітераційного процесу на певному кроці отримаємо значення, менше за нижню допустиму межу. Встановлено, що максимально допустиме значення N залежить від значення ймовірності безвідмовної роботи R. Чим <u>менше</u> значення R, тим при меншому значенні N порушується виконання процедури, як це показано на рис. 1 (крива 1, суцільна, маркер хрест). Для значень $R \ll 0.5$ застосування (8) стає неефективним.

Доповнимо наведену процедуру таким ітераційним виразом. Запишемо (5) для випадку $(K + 1)$ та K відмов:

$$\left.\begin{aligned} p_{N,T}(K+1) &= \frac{N!}{(N-K-1)!\cdot(K+1)!} R^{N-K-1}\cdot(1-R)^{K+1}, \\ p_{N,T}(K) &= \frac{N!}{(N-K)!\cdot K!} R^{N-K}\cdot(1-R)^{K}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

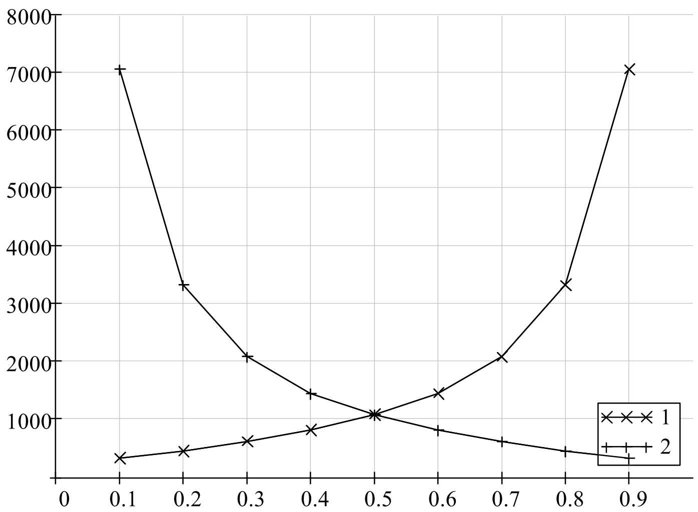

Рис. 1. Графіки залежності допустимого значення об'єму вибірки N від значення ймовірності безвідмовної роботи R

Візьмемо відношення першого виразу (9) до другого. Як видно із цього відношення, кожне попереднє значення виразу (5) відрізняється від наступного на однаковий множник. Отже, обчислювальна процедура ґрунтується на ітераційному виразі

$$p_{N,T}(K) = P(K+1)\cdot\frac{K+1}{N-K}\cdot\frac{R}{1-R}. \tag{10}$$

Цей вираз послідовно розраховується для значень K від $(N-1)$ до 0. Початкове значення, від якого розпочинається ітераційний процес,

$$p_{N,T}(N) = [1-R]^{N}.$$

Для (10), так само, спостерігаємо, якщо N перевищує допустиме значення, то під час виконання ітераційного процесу на певному кроці отримаємо значення, менше за нижню допустиму межу. Проте, для цього виразу чим <u>більше</u> значення R, тим при меншому значенні N порушується виконання процедури, як це показано на рис. 1 (крива 2, суцільна, маркер плюс). Тобто, для значень $R >> 0.5$ застосування (10) стає неефективним.

Якщо жодний із наведених виразів (5), (8) та (10) не забезпечує результату, то використовуємо наближений вираз

$$p_{N,T}(K) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot R\cdot(1-R)\cdot N}}\exp\left(\frac{((1-R)\cdot N-K)^2}{2\cdot R\cdot(1-R)\cdot N}\right). \tag{11}$$

Застосування (11) забезпечує для $N > 1000$ прийнятну у цій роботі точність, проте за швидкістю обчислень він поступається перед (8) і (10).

Обчислювальна процедура, залежно від значення R, вибирає найприйнятніший вираз. Якщо $R \geq 0.5$, то значення функцій ймовірності $p_{N,T}(K)$ розраховуємо за (8), якщо $R < 0.5$, то – (10). У випадку, за якого відповідний ітераційний вираз не дав результату через порушення ітераційного процесу, то використовуємо (11).

Для випадку, за якого модель відмов є експоненціальною, ймовірність безвідмовної роботи визначається згідно з

$$R(t^*) = \exp(-t^*)\,,$$

де t^* – напрацювання об'єкта під час тестування, задане у відносних одиницях.

Перетворення відносних одиниць напрацювання у абсолютні виконуємо згідно з відношенням

$$t = \frac{t^*}{\lambda}\,,$$

де λ – базове значення, яке приймаємо таким, що дорівнює параметрові експоненціальної моделі відмов.

Використовуючи експоненціальну модель відмов розраховано функціонал витрат на проведення тестування. Модель відмов містить один параметр, тому умовою недосягнення результату є відсутність відмов. На рис. 2 наведено якісний тривимірний графік залежності витрат Q від об'єму вибірки N та тривалості тестування T.

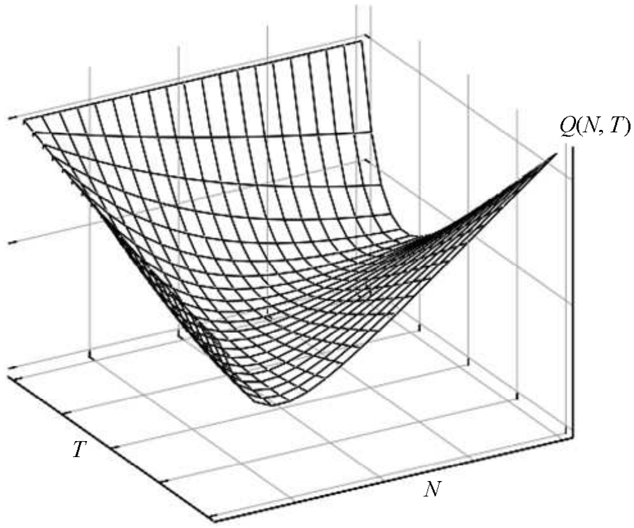

Рис. 2. Графік залежності витрат від об'єму вибірки та тривалості тестування

Як видно з рис. 2 поверхня має лінію, що відповідає мінімуму витрат. Використовуючи для оптимізації метод прямого перебору, визначаємо залежність тривалості тестування від об'єму вибірки за умови забезпечення мінімальних витрат на проведення тестування. Зі збільшенням об'єму вибірки спостерігаємо зменшення часу необхідного для проведення тестування, як це зображено на рис. 3.

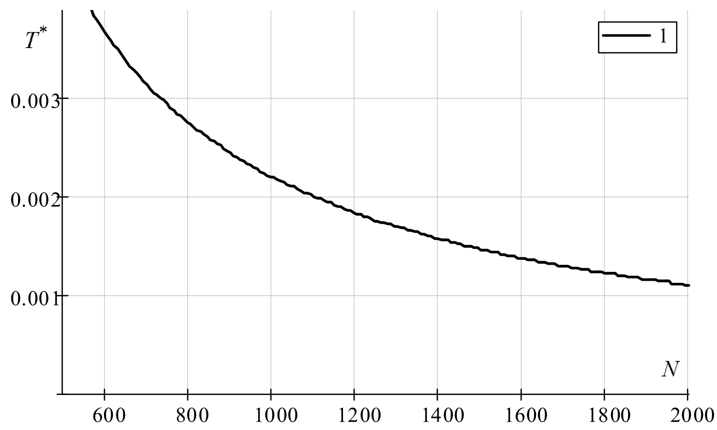

Рис. 3. Графік залежності тривалості тестування від об'єму вибірки за умови забезпечення мінімальних витрат

Висновки. У статті вирішеана проблема визначення оптимального співвідношення між тривалістю тестування та об'ємом вибірки із умови мінімізації витрат під час тестування електромеханічних систем, напрацювання яких розподілено за експоненціальною моделлю відмов.

- Вдосконалено обчислювальну процедуру для розрахунку функції ймовірності біноміального розподілу шляхом розробки ітераційного алгоритму, що забезпечує ефективне та адекватне моделювання планів тестування при великих (понад 150) об'ємах вибірки.
- Побудовано математичну модель для визначення функціоналу витрат на тестування для об'єктів з експоненціальною моделлю відмов, яка ґрунтується на вдосконаленій обчислювальній процедурі розрахунку функції ймовірності біноміального розподілу. Використовуючи таку модель, визначено оптимальне співвідношення між тривалістю тестування та об'ємом вибірки для об'єктів з експоненціальною моделлю відмов.

Отримані результати є основою для продовження досліджень у напряму оптимізації планів тестування, призначених для ідентифікації параметрів моделей відмов, тобто вирішення проблеми з мінімізації витрат під час тестування об'єктів з невідомою наперед моделлю відмов.

Публікація написана в межах наукового проекту за грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених і фінансується за кошти державного бюджету України.

1. Труханов В.М. Надежность технических систем типа подвижных установок на этапе проектирования и испытания опытных образцов. [Текст] / В.М. Труханов. – М.: Машиностроение, 2003. – 320 с. 2. Надежность машиностроительной продукции: Практическое руководство по нормированию, подтверждению и обеспечению [Текст]. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 328 с. 3. Надежность технических систем: Справ. / [Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др.] под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 608 с. 4. Syuan-Rong Huang, Shuo-Jye Wu. Reliability sampling plans under progressive type-i interval censoring using cost functions / Syuan-Rong Huang, Shuo-Jye Wu // Reliability, IEEE Trans. on. – 2008. – Vol. 57, № 3. – P. 445–451. 5. Yeu-Shiang Huang, Cheng-Han Hsieh, Jyh-Wen Ho. Decisions on an Optimal Life Test Sampling Plan With Warranty Considerations / Yeu-Shiang Huang, Cheng-Han Hsieh, Jyh-Wen Ho // Reliability, IEEE Trans. on. – 2008. – Vol. 57, № 4. – P. 643–649. 6. Shcherbovskykh S.V. Binomial Distribution Computational Procedure for NUT&NRT Life Testing Plans Modeling / S.V. Shcherbovskykh // Proc. 9th Int. Workshop "Computational Problems of Electrical Engineering" (CPEE'2008). – Alushta (Crimea), Ukraine. – 2008. – P. 169.