Розрахунки проводилися при таких розмірах лінзи : $z_1 = 0.1$, $z_2 = 0.2$, $z_3 = 0.2$, $z_4 = 0.3$, $z_5 = 0.3$, $z_6 = 0.4$, $r_1 = 0.03$, $r_2 = 0.06$ і значеннях потенціалу $\upsilon_1 = \upsilon_3 = 1$, $\upsilon_2 = 0$. Точність обчислень $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Значення потенціалу $u_{0,j}$ у вузлах сітки на осі симетрії

j	МВРТ (7), (10)	МВРЛ (7), (10)	МВРТ (12), (13)	МВРЛ (12), (13)
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	0.35872	0.35874	0.35671	0.35626
10	0.74410	0.74411	0.74067	0.74037
15	0.80351	0.80351	0.80741	0.80733
20	0.21266	0.21266	0.22645	0.22643
25	0.01163	0.01163	0.01054	0.01054
30	0.21266	0.21266	0.22645	0.22643
35	0.80351	0.80351	0.80741	0.80733
40	0.74412	0.74411	0.74068	0.74037
45	0.35875	0.35874	0.35673	0.35626
50	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Замикання області проводилося при $r_k = 0.3$, $z_k = 0.5$ з нульовим значенням потенціалів на границі області замикання. Характерною особливістю даної лінзи є рівність потенціалів крайніх електродів. Це зумовлює протилежні напрямки поля по обидва боки від середньої площини лінзи. Отже, поле одиночної лінзи завжди має сідлоподібну особливу точку. В результаті чисельних розрахунків одержано саме такий розподіл потенціалу на осі Oz. Це достатньо наглядно підтверджує правильність запропонованої методики.

1. Ильин В.П.. Численные методы решения задач электрооптики. М., 1974. 2. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., 1976. 3. Дудикевич А.Т., Левицька С.М., Підківка Л.І. Підвищена апроксимація рівняння Пуассона в циліндричній системі координат // Вісн. ЛНУ. Сер. прикл. мат. та інформатика, 2000. Вип.1. С.113–116.

УДК 517.988

Загороднюк А.В.
ІППММ НАН України

ВЛАСТИВОСТІ ПОЛІНОМІВ НА ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

A space with natural Hilbertian structure of polynomials on a Hilbert space is constructed. Some properties of such polynomials are investigated. In particular,

continuity of such polynomials in the weak sequential topology is proved. As example, a set of maximal ideals of a special algebra of analytic functions on the Hilbertian ball is found.

У роботі побудовано підпростір поліномів, заданих на гільбертовому просторі, для яких природно визначений скалярний добуток. Досліджено властивості таких поліномів, зокрема доведено їх неперервність у слабко секвенціальній топології. Як приклад застосування отриманих результатів знайдено множину максимальних ідеалів однієї спеціальної алгебри аналітичних функцій на гільбертовій кулі.

Нехай E – комплексний сепарабельний гільбертів простір із ортононормованим базисом e_i, скалярним добутком $(x|y)$ та одиничною кулею B. Позначимо $E^{\otimes n}$ n-ий *гільбертів* тензорний степінь простору E [1, с.27]. Нехай $S_n{:}E^{\otimes n} \to E^{\otimes n}$ – лінійний оператор, який задається на базисних векторах простору $E^{\otimes n}$ за формулою

$$S_n\left(e_{k_1} \otimes \ldots \otimes e_{k_n}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{s \in \mathrm{v}} e_{k_{s(1)}} \otimes \ldots \otimes e_{k_{s(n)}},$$

де сума береться по всіх елементах групи підстановок v на множині $\{1, \ldots, n\}$.

Твердження 1. Оператор S_n є неперервним ортогональним проектором на просторі $E^{\otimes n}$.

Доведення випливає з безпосередньої перевірки.

Нагадаємо, що однорідним поліномом на банаховому просторі X називається звуження на діагональ $(x, \ldots, x)$ полілінійної форми на декартовому степені простору X [2].

Позначимо E^n образ простору $E^{\otimes n}$ при відображенні S_n. Ми будемо називати простір E^n *симетричним* гільбертовим тензорним степенем простору E^n. Простір E^n складається з елементів вигляду $x_1 \ldots x_n := 1/n! \sum_{s \in \mathrm{v}} x_{s(1)} \ldots x_{s(n)}$, де $x_1, \ldots x_n \in E$. Для скорочення запису ми будемо також писати x^n замість $x \ldots x$.

На просторі E^n існує природний скалярний добуток $(u|v)_n$, такий що $(x_1 \ldots x_n | y_1 \ldots y_n) = (x_1|y_1) \ldots (x_n|y_n)$.

Лема 1. Існує ізометричний антиізоморфізм $w \mapsto P_w$ симетричного гільбертового тензорного степеня E у деякий підпростір $P(^nE)$ неперервних n-однорідних поліномів на E, який задається формулою $P_w(x) = (x^n|w)_n$.

Доведення. Для кожного $w \in E^n$ відображення $P_w(x)$ є звуженням на діагональ $(x, \ldots, x)$ n-лінійного неперервного відображення $A_w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \ldots x_n | w)_n$. Тому за означенням P_w – поліном на E. З іншого боку $P_{w+u} = P_w + P_u$ і $P_{tw} = \bar{t} P_w$, де $\bar{t}$ комплексно-спряжене до комплекного числа t. Лему доведено.

Простір $P({}^nE)$ є гільбертовим з нормою $\|P_w\| = \|w\|$. Поліноми з простору $P({}^nE)$ ми будемо називати *гільбертовими* однорідними (степеня n) поліномами, скінченні суми гільбертових однорідних поліномів називаються *гільбертовими* поліномами.

Лема 2. $E^nE^m \subset E^{n+m}$ для будь-яких натуральних m, n.

Доведення. Нехай $w \in E^n, u \in E^m$ і $u = \sum_{|j|=1}^{\infty} \beta_{(j)} e_{j_1} \ldots e_{j_n}$, $w = \sum_{|i|=1}^{\infty} \alpha_{(i)} e_{i_1} \ldots e_{i_n}$, де $(i) = i_1, \ldots, i_n$, $(j) = j_1, \ldots, j_n$ – мультиіндекси. Тоді

$$wu = \sum_{|i|,|j|=1}^{\infty} \alpha_{(i)} \beta_{(j)} e_{i_1} \ldots e_{i_n} e_{j_1} \ldots e_{j_n}.$$

Оскільки $\sum_{|i|=1}^{\infty} \left|\alpha_{(i)}\right|^2 < \infty$ і $\sum_{|j|=1}^{\infty} \left|\beta_{(j)}\right|^2 < \infty$ то

$$\sum_{|i|,|j|=1}^{\infty} \left|\alpha_{(i)}\beta_{(j)}\right|^2 = \sum_{|i|=1}^{\infty} \left|\alpha_{(i)}\right|^2 \sum_{|j|=1}^{\infty} \left|\beta_{(j)}\right|^2 = \|w\|^2 \|u\|^2 < \infty$$

Наслідок 1. Добуток двох гільбертових поліномів є гільбертовим поліномом.

Доведення. Нехай $P(x) = (x^n|w)_n$ і $Q(x) = (x^m|u)_m$ для деяких $w \in E^n$, $u \in E^m$. Оскільки $E^nE^m \subset E^{n+m}$ то $wu \in E^{n+m}$ і $P(x)Q(x) = (x^n|w)_n (x^m|u)_m = (x^{n+m}|wu)_{n+m} \in E^{n+m}$. Наслідок доведено.

Нагадаймо, що поліном P називається поліномом скінченного типу, якщо він є скінченною алгебраїчною комбінацією лінійних функціоналів. Легко бачити, що всякий поліном скінченного типу є гільбертовим.

Твердження 2. Простір поліномів скінченного типу степеня n щільний у просторі $P({}^nE)$.

Доведення випливає з того, що простір скінченних послідовностей є щільним у гільбертовому просторі та леми 1.

Наступна теорема показує, що простір гільбертових поліномів є власним підпростором у просторі всіх неперервних поліномів і строго містить простір слабко неперервних поліномів на обмежених множинах.

Теорема 1.

1. Будь-який гільбертів поліном є слабко секвенціально неперервним.
2. Існує гільбертів поліном, слабко розривний на обмеженій множині.

Доведення. 1. Нехай x – слабко збіжна послідовність до деякого $x_0 \in E$. Тоді $x_k{}^n$ – обмежена послідовність в E^n. З рефлексивності E^n випливає, що $x_k{}^n$ має слабку граничну точку $w \in E^n$. Тоді для будь-якого лінійного функціоналу $\varphi \in E'$, $(\varphi^n|w)_n = \varphi^n(x_0)$. Тому для будь-якого полінома Q скінченного типу, $q(w) = q(x_0{}^n)$, де q –

лінійний функціонал на E^n, який відповідає поліному Q. Із щільності поліномів скінченного типу в $P(^nE)$ (твердження 2) випливає, що $w = x_0{}^n$.

2. Відомо, що ін’єктивний симетричний тензорний степінь E є передспряженим простором до простору слабко неперервних поліномів на обмежених множинах [1]. Оскільки спряжений простір до гільбертового є знову гільбертовим і, отже, має базис, то спряжений до ін'єктивного тензорного степеня є проективний тензорний степінь [3], який є не рефлексивним простором [4]. З іншого боку, простір гільбертових поліномів є, очевидно, рефлексивним. Тому він не ізоморфний до простору слабко неперервних поліномів на обмежених множинах.

Зауважимо, що поліном $F((a_i)) = \sum a_i{}^2$ не є слабко секвенціально неперервним на одиничній кулі, тому він не є гільбертовим.

Опишемо застосування отриманих результатів для знаходження спектра (множини максимальних ідеалів) однієї алгебри аналітичних функцій на одиничній кулі в E.

Позначимо $W(B)$ множину аналітичних функцій на B виду $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)$, де $P_k \in P(^nE)$ і $\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k\| < \infty$. Зауважимо, що функції з $W(B)$ визначені і обмежені на B, оскільки $\lim_{k\to\infty} \left\|P_k\right\|^{1/k} \le 1$ [2]. Крім того, з наслідку 1 випливає, що $W(B)$ є справді алгеброю, повною у нормі $\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k\|$.

Нагадаємо, що ℓ_p-сумою $(X_n)_{\ell_p}$ банахових просторів X_n називається банахів простір послідовностей (x_i), $x_i \in X_i$ (x_i), $x_i \in X_i$ таких, що $\|x_i\| \in \ell_p$.

Лема 3. Алгебра $W(B)$ антиізоморфна згортковій алгебрі $(E^n)_{\ell_1}$ з операцією $(u_k) * (v_j) = (w_j)$, яка визначається наступною рівністю: $w_i = \sum_{k=1}^{i} u_k v_{i-k}$ де $(u_k), (v_k), (w)_k \in (E^n)_{\ell_1}$, $u_k, v_k, w_k \in E^n$. Крім того $W(B)' = (E^n)_{\ell_\infty}$ з точністю до ізоморфізму банахових просторів.

Доведення. Перша частина леми перевіряється безпосередньо, а друга – є відомою [1].

Теорема 2. Множина максимальних ідеалів алгебри $W(B)$ гомеоморфна одиничній сфері простору E у топології Гельфанда.

Доведення. Нехай φ – лінійний мультиплікативний функціонал на $W(B)$. Тоді за лемою 3, $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \in (E^n)_{l_\infty}$, де $\varphi_n \in E^n$ – звуження φ на E^n. Нехай $f \in W(B)$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$. Тоді

$$\varphi(f^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sum_{n=1}^{k} P_n P_{k-n}.$$

З іншого боку, з мультиплікативності φ випливає, що

$$\varphi(f^2) = (\varphi(f))^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(P_n)\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m(P_m) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\varphi_n(P_n)\varphi_{k-n}(P_{k-n}).$$

Порівнюючи дві останні формули, отримуємо, що $\varphi_n = \varphi_1^n$ для будь-якого n. Крім того, з того, що норма мультиплікатиного функціоналу дорівнює одиниці, випливає, що $\|\varphi_1\| = 1$. Враховуючи, що лінійний функціонал $\varphi_1 \in E'$ визначається деяким елементом $x \in E$, отримаємо, що всякий лінійний мультиплікативний функціонал на W задається значенням в деякій точці одиничної сфери. Топологія Гельфанда на цій сфері задається як найслабша топологія, в якій всі функції з $W(B)$ є неперервними.

1. Diestel J., Jarchow H., Tonge A. Absolutely Summing Operators, Cambrige studies in advanced mathematics, 43. 2. Dineen S. Complex Analysis in Locally Convex Spaces // Math. Studies. 1981. 3. Holub J.R., Retheford J.R. Some curious bases for c_0 and $C[0,1]$ // Studia Math. 34, 1970. P.227-240. 4. Holub J.R. Thensor product bases and thensor diagonals // Trans. Amer. Math. Soc., 1970. P.563-579.

УДК 517.927

Захарійченко Ю.О.
Інститут математики НАН України

МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ І ОБМЕЖЕННЯМИ

Application of iterative and projection-iterative methods to the boundary problem for the system of differential equations with an impulse effect in fixed moments of time and with parameters is sufficiently substantiated.

Обґрунтовується застосування ітераційного і проекційно-ітеративного методів до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу та параметрами.

Останнім часом набули поширення проекційно-ітеративні методи [2,3], які поєднують в собі ідею як проекційних, так й ітеративних методів. Нижче розглядається система диференціальних рівнянь з параметрами в імпульсних умовах та обмеженнями, до якої застосовуються метод послідовних наближень та модифікований проекційно-ітеративний метод.

1. Формулювання задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = F(t,x) \quad , \tag{1}$$

$$x(t_i+0) = S_i x(t_i-0) + \lambda_i, i = \overline{1,l}, \tag{2}$$