УДК 517.949.21

Дудикевич А.Т., Підківка Л.І.
Львівський Національний університет ім. І.Франка

СТВОРЕННЯ МОДЕЛІ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ В ЕЛЕКТРОННІЙ ОПТИЦІ

The calculation of the potential of electrostatic field is performed to calculation of inner Dirichlet problem for Poisson equation. This problem is solved by the net method using iterative method of over-relaxation using dots and lines.

Розрахунок потенціалу електростатичного поля зводиться до розв'язування внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Пуассона. Задача розв'язується методом сіток з використанням методів верхньої релаксації за точками і верхньої релаксації з прогонкою за лініями.

Розрахунок потенціалу електростатичних полів електронно-оптичних систем зводиться до розв'язування математичної задачі [1] : знайти функцію $u(r,z)$, яка задовольняє рівняння Пуассона в циліндричній системі координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(r,z)\ ,\ \ (r,z)\in G \tag{1}$$

з першою граничною умовою

$$u\big|_{\Gamma}=g(r,z), \tag{2}$$

де $f(r,z)$ і $g(r,z)$ – задані функції, G – деяка замкнена область з границею Γ.

Рівняння (1) при $r=0$ має особливість, і тому для виділення потрібного нам розв'язку тут необхідно вказати додаткові умови. Нас цікавлять обмежені при $r=0$ розв'язки, а такі розв'язки, які задовольняють умову

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial u}{\partial r}=0\ .$$

Тому на осі симетрії рівняння (1) записуються так:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(0,z)\ . \tag{3}$$

Введемо по змінних r і z рівномірні сітки з кроками h_r і h_z відповідно:

$$\omega_z=\left\{z_j=jh_z\ ,\ j=\overline{0,m}\ ,\ ,h_z>0\right\},$$
$$\omega_r=\left\{r_i=ih_r\ ,\ i=\overline{0,n}\ ,\ h_r>0\right\}.$$

Сітка, на якій ми будемо апроксимувати задачу (1)–(3), матиме вигляд

$$\Omega=\omega_r\times\omega_z=\left\{(r_i,z_j)\,\middle|\ r_i\in\omega_r\ ,z_j\in\omega_z\right\}. \tag{4}$$

Оператор L_z апроксимуємо найпростішим різницевим співвідношенням, а L_r – як оператор зі змінними коефіцієнтами [2]:

$$L_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \sim \quad \Lambda_z u = u_{\bar{z}z} \quad ,$$

$$L_r u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \sim \quad \Lambda_r u = \frac{1}{r}\left(\rho u_{\bar{r}}\right)_r ,$$

де

$$\rho(r) = r - \frac{h_r}{2} \quad .$$

Отже, апроксимацію рівняння (1) для $r \neq 0$ можна записати так:

$$\frac{1}{r}\left(\rho u_{\bar{r}}\right)_r + u_{\bar{z}z} = -f(r,z)\ ,\ (r,z) \in \Omega. \tag{5}$$

Таким чином, для будь-якого вузла (i, j) сітки Ω, що не лежить на осі симетрії, рівняння (5) матиме вигляд

$$\frac{1}{r_i}\frac{1}{h_r}\left[\rho_{i+1}\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} - \rho_i\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r}\right] + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_z^2} = -f_{i,j} \tag{6}$$

де

$$r_i = i h_r ,$$

$$\rho_{i+1} = r_{i+1} - \frac{h_r}{2} = \left(i + \frac{1}{2}\right)h_r \ ,$$

$$\rho_i = r_i - \frac{h_r}{2} = \left(i - \frac{1}{2}\right)h_r \ .$$

Підставивши r_i ,ρ_i ,ρ_{i+1} у різницеве рівняння (6), одержимо

$$\frac{1}{i}\frac{1}{h_r^2}\left[\left(i + \frac{1}{2}\right)u_{i+1,j} - 2iu_{i,j} + \left(i - \frac{1}{2}\right)u_{i-1,j}\right] + \frac{1}{h_z^2}\left(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right) = -f_{i,j} \tag{7}$$

Звідси

$$u_{i,j} = \frac{1}{h_r^2 + h_z^2}\left(\frac{2i-1}{4i}h_z^2 u_{i-1,j} + \frac{h_r^2}{2}u_{i,j-1} + \frac{2i+1}{4i}h_z^2 u_{i+1,j} + \frac{h_r^2}{2}u_{i,j+1} + \frac{h_r^2 h_z^2}{2} f_{i,j}\right),$$

$$(i, j) \in \Omega \tag{8}$$

Рівняння на осі симетрії (3) апроксимується різницевим

$$2u_{\bar{r},r} + u_{\bar{z},z} = -f(0,z), \tag{9}$$

тобто для будь-якого вузла $(0, j)$ сітки Ω, що лежить на осі симетрії $(i = 0)$, матимемо

$$2\frac{u_{1,j} - 2u_{0,j} + u_{-1,j}}{h_r^2} + \frac{u_{0,j+1} - 2u_{0,j} + u_{0,j-1}}{h_z^2} = -f_{0,j} .$$

Враховуючи умову симетрії розв'язку

$$u_{-i,j} = u_{i,j} ,$$

остаточно одержимо

$$u_{0,j} = \frac{1}{2h_z^2 + h_r^2}\left(2h_z^2 u_{1,j} + \frac{h_r^2}{2} u_{0,j+1} + \frac{h_r^2}{2} u_{0,j-1} + \frac{h_r^2 h_z^2}{2} f_{0,j} \right). \qquad (10)$$

Апроксимація граничних умов здійснюється точно

$$u\big|_{\gamma_h} = g_{i,j} , \qquad (11)$$

де γ_h – множина граничних вузлів.

Різницева схема (8), (10), (11) апроксимує задачу (1)–(3) з величиною похибки ψ, для якої має місце оцінка

$$\psi = O\left(h_r^2 + h_z^2\right) \text{ на осі симетрії,}$$

$$\psi = O\left(\frac{h_r^2}{r} + h_z^2\right) \text{ для } r \neq 0 \ \left(i \neq 0\right).$$

Різницева задача четвертого порядку апроксимації для задачі (1)–(2) може бути представлена у вигляді [3]

$$\frac{1}{3h^2}\left[\left(2 - \frac{1}{i} - \frac{1}{4i^2} - \frac{7}{64i^3}\right)u_{i-1,j} + \left(2 + \frac{1}{i} - \frac{1}{4i^2} + \frac{7}{64i^3}\right)u_{i+1,j} + 2\left(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right) + \right.$$

$$+\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4i} + \frac{1}{128i^3}\right)\left(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4i} - \frac{1}{128i^3}\right)\left(u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1}\right) -$$

$$\left. -\left(10 - \frac{1}{2i^2}\right)u_{i,j}\right] = -f_{i,j} - \frac{h^2}{12}\left(\Delta f\right)_{i,j} , \ h = h_r = h_z , \qquad (12)$$

(для $r \neq 0$)

$$u_{0,j} = \frac{3}{5}\frac{h_r^2 h_z^2}{2h_z^2 + h_r^2}\varphi_{0,j} + \frac{10h_z^2 - h_r^2}{5\left(2h_z^2 + h_r^2\right)}u_{1,j} +$$

$$+\frac{1}{10}\left(u_{1,j-1} + u_{1,j+1}\right) + \frac{5h_r^2 - 2h_z^2}{10\left(2h_z^2 + h_r^2\right)}\left(u_{0,j-1} + u_{0,j+1}\right), \qquad (13)$$

(для $r = 0$)

де

$$\varphi_{0,j} = \left(f + \frac{h_r^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{h_z^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{0,j} .$$

Системи різницевих рівнянь (7), (10) і (12), (13) будемо розв'язувати ітераційними методами верхньої релаксації за точками (МВРТ)і верхньої релаксації з прогонкою за лініями (МВРЛ), які в загальному випадку запишемо у вигляді

$$p_1 u_{i-1,j} + p_2 u_{i,j-1} + p_3 u_{i+1,j} + p_4 u_{i,j+1} - p_0 u_{i,j} = f_{i,j} . \qquad (14)$$

Ітераційні формули методу верхньої релаксації за точками запишуться так:

$$\hat{u}_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{p_0}\left(p_1 u_{i-1,j}^{(k+1)} + p_2 u_{i,j-1}^{(k+1)} + p_3 u_{i+1,j}^{(k)} + p_4 u_{i,j+1}^{(k)} - f_{i,j}\right) \qquad (15)$$

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \omega_t \hat{u}_{i,j}^{(k+1)} + \left(1 - \omega_t\right)u_{i,j}^{(k)}, \qquad (16)$$

де k – номер ітерації; ω_t – параметр верхньої релаксації, який визначається за формулою

$$\omega_{t+1} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{\left(\lambda_1^{(t)}+\omega_t-1\right)^2}{\lambda_1^{(t)}\omega_t^2}}}\ , t=0,1,..., \qquad (17)$$

де $\lambda_1^{(t)}$ – максимальне за модулем власне число процесу (15), ω_0 – задана величина.

Доведено, що процес обчислень ω_t за формулою (17), коли для кожного обчисленого ω_t знаходиться $\lambda_1^{(t)}$, потім ω_{t+1} і т.д., є розбіжним при $\omega_0 = 1$. Надалі за $\omega_0 = 1$ і $\lambda_1 = \lambda_1^{(0)}$ підраховуємо ω_1, з яким будемо проводити ітерації до закінчення ітераційного процесу.

У даному методі застосовується прискорення збіжності з використанням максимального за абсолютною величиною власного числа λ_1. За наближене значення λ_1 приймається величина $\lambda_1^{(N_1)}$, де N_1 – мінімальне ціле число, для якого виконується умова:

$$\left| \frac{\lambda_1^{(N_1)}}{\lambda_1^{(N_1-1)}} - 1 \right| \le \varepsilon_1 \ . \qquad (18)$$

Тут ε_1 – задане мале число

$$\lambda_1^{(k)} = \left(\frac{\sum\limits_{i,j}\left(u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}\right)^2}{\sum\limits_{i,j}\left(u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k-1)}\right)^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \qquad (19)$$

Розрахункові формули методу верхньої релаксації з прогонкою за лініями для системи різницевих рівнянь (14) записуються у вигляді:

$$p_2 \widehat{u}_{i,j-1}^{(k+1)} - p_0 \widehat{u}_{i,j}^{(k+1)} + p_4 \widehat{u}_{i,j+1}^{(k+1)} = f_{i,j} - p_1 u_{i-1,j}^{(k+1)} - p_3 u_{i+1,j}^{(k)} \qquad (20)$$

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \omega_t \widehat{u}_{i,j}^{(k+1)} + \left(1-\omega_t\right) u_{i,j}^{(k)} \ , \ t = 0,1. \qquad (21)$$

Для кожного i система (20) розв'язується методом прогонки. Обчислення розв'язку $u_{i,j}$ у всіх вузлах сітки продовжується до виконання умови

$$\left\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \right\| < \varepsilon .$$

В електронній оптиці часто зустрічаються імерсійні лінзи, які утворені двома або трьома циліндрами різних радіусів із відповідними значеннями потенціалів. На практиці виникає необхідність розрахунку потенціалу осесиметричного електростатичного поля з подальшим використанням даних результатів для розрахунку траєкторій руху електронів одиночних електронних лінз. Меридіанний перетин осесиметричної одиночної лінзи містить три лінії із значенням потенціалу $\upsilon_i \left(i=\overline{1,3}\right)$ і розмірами z_i, $z_{i+1}\left(i=1,3,5\right)$. Перша і третя лінії знаходяться від осі симетрії на відстані r_2, а друга – на відстані r_1 $\left(r_1 < r_2\right)$.

Розрахунки проводилися при таких розмірах лінзи : $z_1 = 0.1$, $z_2 = 0.2$, $z_3 = 0.2$, $z_4 = 0.3$, $z_5 = 0.3$, $z_6 = 0.4$, $r_1 = 0.03$, $r_2 = 0.06$ і значеннях потенціалу $\upsilon_1 = \upsilon_3 = 1$, $\upsilon_2 = 0$. Точність обчислень $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Значення потенціалу $u_{0,j}$ у вузлах сітки на осі симетрії

j	МВРТ (7), (10)	МВРЛ (7), (10)	МВРТ (12), (13)	МВРЛ (12), (13)
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	0.35872	0.35874	0.35671	0.35626
10	0.74410	0.74411	0.74067	0.74037
15	0.80351	0.80351	0.80741	0.80733
20	0.21266	0.21266	0.22645	0.22643
25	0.01163	0.01163	0.01054	0.01054
30	0.21266	0.21266	0.22645	0.22643
35	0.80351	0.80351	0.80741	0.80733
40	0.74412	0.74411	0.74068	0.74037
45	0.35875	0.35874	0.35673	0.35626
50	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Замикання області проводилося при $r_k = 0.3$, $z_k = 0.5$ з нульовим значенням потенціалів на границі області замикання. Характерною особливістю даної лінзи є рівність потенціалів крайніх електродів. Це зумовлює протилежні напрямки поля по обидва боки від середньої площини лінзи. Отже, поле одиночної лінзи завжди має сідлоподібну особливу точку. В результаті чисельних розрахунків одержано саме такий розподіл потенціалу на осі Oz. Це достатньо наглядно підтверджує правильність запропонованої методики.

1. Ильин В.П.. Численные методы решения задач электрооптики. М., 1974. 2. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., 1976. 3. Дудикевич А.Т., Левицька С.М., Підківка Л.І. Підвищена апроксимація рівняння Пуассона в циліндричній системі координат // Вісн. ЛНУ. Сер. прикл. мат. та інформатика, 2000. Вип.1. С.113–116.

УДК 517.988

Загороднюк А.В.
ІППММ НАН України

ВЛАСТИВОСТІ ПОЛІНОМІВ НА ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

A space with natural Hilbertian structure of polynomials on a Hilbert space is constructed. Some properties of such polynomials are investigated. In particular,