Теорема. *Простір* $\hat{\otimes} Exp^{\nu}\left(\frac{d}{dt_i}\right)$ *збігається з простором цілих функцій експоненціального типу* $\le \nu$ *, які належать* $L_p\left(R^n\right)$.

Доведення. За теоремою Соболєва

$$\sup_{t\in R^n}\left|u(t)\right| \le c_1 \max\left\{\|u\|_{L_p\left(R^n\right)}, \left\|D^{\alpha}u\right\|_{L_p\left(R^n\right)}\right\},$$

$$\sup_{t\in R^n}\left|D^{k\cdot\alpha}u(t)\right| \le cc_1 \max\{1,\nu\}\nu^k = c_0\nu^k, \quad \forall k.$$

Отже, простір $\hat{\otimes} Exp^{\nu}\left(\frac{d}{dt_i}\right)$ міститься в просторі цілих функцій експоненціального типу $\le \nu$, які належать просторові $L_p\left(R^n\right)$ [5].

Нехай $u(t)$ – ціла функція експоненціального типу $\le \nu$. Згідно з нерівністю Бернштейна справджується

$$\left\|D^{k\cdot\alpha}u\right\|_{L_p\left(R^n\right)} \le \nu^k \|u\|_{L_p\left(R^n\right)},$$

тобто $u \in \hat{\otimes} Exp^{\nu}\left(\frac{d}{dt_i}\right)$. Теорема доведена.

1. Радыно Я.В. Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальные уравнения // Дифференциальные уравнения. 1985. Т.21. №9. С. 1559–1569. 2. Лопушанський О.В. Операторне числення на ультрагладких векторах // Укр. мат. журн. 1992. Т.44. №4. С. 502–513. 3. Горбачук М.Л. Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. 1995. Т.47. №5. С. 616–628. 4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.М., 1969.

УДК 517.927

В.В. Волошин, В.М. Цимбал
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗАДАЧА БІЦАДЗЕ-САМАРСЬКОГО ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Розглянуто сингулярно збурену задачу Біцадзе-Самарського для звичайного диференціального рівняння другого порядку. Методом примежового шару отримано асимптотичне розвиненя розв”язку цієї задачі.

Singularly perturbed Bitsadze-Samarsky problem to ordinary differential equation of the second order is considered. By application of the boundary layer method an asymptotic expantion of solution of this problem is obtained.

1. Вступ

Останнім часом велика увага приділяється вивченню нелокальних задач як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь у частинних похідних різних типів. Це пов'язано з різними практичними застосуваннями та з їхньою теоретичною важливістю.

Цікавими є і задачі такого типу для сингулярно збурених рівнянь.

2. Формулювання задачі

У роботі розглядається задача Біцадзе-Самарського

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x) \quad (0 < x < 1), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \mathrm{u}(1) = \alpha \mathrm{u}(\xi), \tag{2}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $\xi \in (0,1), \alpha$ – стале число.

Припускається, що функції, які входять в (1), достатньо гладкі для проведення подальших викладень, порядок їх гладкості, очевидно, зв"язаний з порядком асимптотики N (дивитись нижче), $b(x) \geq 0, -\infty < \alpha \leq 1, \alpha \neq 0$.

За цих припущень для достатньо малих значень параметра ε існує єдиний розв'язок задачі (1),(2). Це показується аналогічно, як і у роботі $[3]$, де розглянуто загальну задачу без малого параметра. Потрібно зауважити, що у $[3]$ існування єдиного розв'язку задачі отримано при деяких додаткових припущеннях на коефіцієнт $a(x)$.

3. Побудова формальної асимптотики

Методом примежового шару $[1]$,$[2]$ побудуємо асимптотичне розвинення розв'язку задачі (1), (2) за степенями ε .При цьому розглянемо два суттєво різних випадки.

1) Випадок $a(x) > 0$. Асимптотичне розвинення шукаємо у вигляді

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i y_i(x) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(\tau) + R_N(x,\varepsilon), \tag{3}$$

де $\tau = \dfrac{x}{\varepsilon}$.

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у (3). Вони визначаються стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $y_i(x), i = \overline{0,N}$ є розв"язками нестандартних задач для лінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$a(x)y_i'(x) - b(x)y_i(x) = f_i(x) \quad (0 < \mathrm{x} < 1), \mathrm{y_i}(1) = \alpha y_i(\xi), \tag{4}$$

де $f_0(x) \equiv f(x), f_i(x) = -y_{i-1}''(x)$.

Задачі (4) можна розв'язати рекурентно у явному вигляді, якщо виконується умова розв'язуваності

$$\alpha \neq \exp\left[-\int_1^{\xi} \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} d\zeta\right], \tag{5}$$

що ми і будемо припускати і додатково до раніше зроблених припущень.

Функції примежового шару в околі $x = 0$ $\Pi_i(\tau)$, де $i = \overline{0,N}$, визначаються як розв'язки таких задач:

$$\Pi_i''(\tau) + a(0)\Pi_i'(\tau) = G_i(\tau), \Pi_i(0) = -y_i(0), \Pi_i(\tau) \underset{\tau\to\infty}{\to} 0, \tag{6}$$

де $G_0(\tau) \equiv 0, G_i(\tau)$ $(i = \overline{1, N})$ залежать лінійно від $\Pi_j(\tau)$ та $\Pi'_j(\tau)$ $(j < i)$.

Функції $\Pi_s(\tau)$ $(i = \overline{0, N})$ визначаються рекурентно після того, як визначені всі функції $y_i(x)$ $(i = \overline{0, N})$.

Отже, у цьому випадку отримано формальну асимптотику розв"язку задачі (1), (2).

2) $a(x) < 0$. Для побудови асимптотики використаємо ідею побудови асимптотики розв'язку складнішої сингулярно збуреної задачі на основі асимптотики розв'язку простішої сингулярно збуреної задачі [1]. А саме, спочатку побудуємо розв'язок допоміжної задачі для рівняння (1) з умовами

$$y(0) = 0, \; y(1) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \beta_i, \qquad (7)$$

де β_i деякі параметри, які будуть визначені пізніше.

Асимптотичне розвинення розв"язку задачі (1), (6) шукаємо у вигляді

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i y_i(x) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i(\zeta) + R_N(x,\varepsilon), \qquad (8)$$

де $\zeta = \dfrac{1-x}{\varepsilon}$.

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у (8). Їх отримують стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $y_i(x)$ $(i = \overline{0, N})$ є розв'язками задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$a(x) y_i'(x) - b(x) y_i(x) = f_i(x) \; (0 < x < 1), \; y_i(0) = 0, \qquad (9)$$

де $f_0(x) \equiv f(x), \; f_i(x) = -y''_{i-1}(x)$. Вони визначаються рекурентно у явному вигляді.

Функції примежового шару в околі $x = 1$ $Q_i(\zeta)$ $(i = \overline{0, N})$ визначаються як розв'язки задач

$$Q_i''(\zeta) - a(1) Q_i'(\zeta) = P_i(\zeta), \; Q_i(0) = -y_i(1) + \beta_i, \; Q_i(\zeta) \underset{\zeta \to \infty}{\to} 0, \qquad (10)$$

де $P_0(\zeta) \equiv 0, \; P_i(\zeta)$ $(i = \overline{1, N})$ залежать лінійно від $Q_j(\zeta), \; Q_j'(\zeta)$ $(j < i)$.

Функції $Q_i(\zeta)$ $(i = \overline{0, N})$ визначаються рекурентно після того, як отримані всі функції $y_i(x)$ $(i = \overline{0, N})$.

Отже, формальна асимптотика розв"язку допоміжної задачі (1), (7) побудована. Вона містить параметри β_i $(i = \overline{0, N})$. Визначимо тепер ці параметри так, щоб формальна асимптотика розв'язку допоміжної задачі (1), (7) була одночасно і формальною асимптотикою розв'язку вихідної задачі (1), (2).

Підстановка асимптотичного розвинення (8) розв"язку допоміжної задачі (1), (7) у нелокальну умову (друга з умов (2)) дає співвідношення для визначення β_i $(i = \overline{0, N})$:

$$\beta_i = \alpha u_i(\xi) \; (i = \overline{0, N}). \qquad (11)$$

Підставляючи отримані з (11) значення β_i $(i = \overline{0, N})$ у (10), отримаємо остаточно формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді (8).

4. Оцінка залишкового члена

Залишковий член асимптотики є розв"язком задачі, що подібна вихідній. Використовуючи принцип максимуму $[5]$ і міркування аналогічні до $[3]$, отримуємо оцінку

$$\left|R_N(x,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^{N+1}, \tag{12}$$

де константа C не залежить від ε, що і доводить коректність побудованих асимптотичних розвинень (3) і (8).

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Ассимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.,1973. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат.наук. 1957. Т.12. №5. С.3-122. 3. Довлетов Д.М. О нелокальной краевой задаче первого рода в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференц.уравнения.1989. №5. С.1297-1306. 4. Дулан Э. ,Миллер Дж.,Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М., 1983. 5. Protter M.A., Weinberger H.F. Maxitum principles in differential equations/ N.Y.:Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.

УДК 519.62

Б.Й. Бандирський
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики та програмування

ДВОСТОРОННІ ОЦІНКИ ДЛЯ ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ

Метою цієї роботи є одержання явних двосторонніх апріорних оцінок наб–лиження власних функцій періодичної задачі Штурма-Ліувілля за допомогою FD-методу.

The purpose of this paper is obtaining of explicit two-sided a priori estimation aproximations for eigenfunctions periodic Sturm-Liouville problem by FD-methods.

1. Вступ

З погляду числових методів задача Штурма-Ліувілля з періодичними умовами

$$u''(x)+[\lambda-q(x)]u(x)=0, \quad 0<x<1, \tag{1.1}$$

$$u(0)=u(1), \;\; u'(0)=u'(1) \tag{1.2}$$

представляє значні труднощі, оскільки її власні значення

$$\lambda_0 \le \lambda_2^- \le \lambda_2^+ \le \ldots \le \lambda_{2n}^- \le \lambda_{2n}^+ \le \ldots,$$

починаючи з деякого номера n, мають таку асимптотичну поведінку:

$$\lambda_{2n}^{\pm} = \pi^2\left[2n+\int_0^1 q(x)dx\,\frac{1}{4n} \pm \left|\int_0^1 q(x)e^{i4n\pi x}dx\right|\frac{1}{4n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \tag{1.3}$$