УДК 517.98

В.А. Ряжська
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра обчислювальної математики і програмування

ВЕКТОРИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ОПЕРАТОРА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НАД ПРОСТОРОМ $\hat{\otimes}_i L_p(R)$

Вектори експоненціального типу лінійного оператора були введені в роботі [1], властивості цих векторів детально досліджувались, наприклад, в роботах [2, 3]. У цій роботі обчислено простір векторів експоненціального типу оператора диференціювання над поповненням тензорного добутку просторів $L_p(R)$.

Exponential type vectors of a linear operator were introduced by Ya. Radyno, and their properties have been investigated in details by O.Lopushansky and M.Gorbachuck. The space of exponential type vectors of a differential operator upon supplement projective tensor product of $L_p(R)$ spaces is obtained in the present paper.

Розглянемо скінченний набір банахових просторів $L^i_p(R)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, де $L^i_p(R)=L_p(R)$. Нехай $\otimes_i L_p(R)$ – їх тензорний добуток з нормою

$$\|u\|_{\otimes_i L_p(R)} = \inf \sum_{k=1}^{K} \left\|x_k^1\right\|^p \cdot \ldots \cdot \left\|x_k^n\right\|^p ,$$

де $\inf$ береться по всіх зображеннях $u \in \otimes_i L_p(R)$ у вигляді скінченних сум $u=\sum_{k=1}^{K} \otimes_i x_k^i$, де $\otimes_i x_k^i = x_k^1 \otimes \ldots \otimes x_k^n$. Через $\hat{\otimes}_i L_p(R)$ позначимо поповнення простору $\otimes_i L_p(R)$ за цією нормою.

Лема. *Простір* $\hat{\otimes}_i L_p(R)$ *ізометрично ізоморфний простору* $L_p\left(R^n\right)$.

Доведення. За теоремою Фубіні простір $L_p\left(R; L_p\left(R^{n-1}\right)\right)$ збігається з простором $L_p\left(R^{n-1}\right)$ – значних функцій

$$\int_R \left\| f\left(t_1,\ldots,t_{n-1},t_n\right)\right\|^p_{L_p\left(R^{n-1}\right)} dt_n ,$$

де

$$\left\| f\left(t_1,\ldots,t_{n-1},t_n\right)\right\|_{L_p\left(R^{n-1}\right)} = \left(\int_{R^{n-1}} \left| f\left(t_1,\ldots,t_{n-1},t_n\right)\right|^p dt_1 \ldots dt_{n-1} dt_n \right)^{1/p} .$$

Покажемо, що ця норма дорівнює нормі проективного тензорного добутку $L_p\left(R^{n-1}\right)\hat{\otimes} L_p(R)$.

Нехай $u \in L_p\left(R^{n-1}\right)\hat{\otimes} L_p(R)$, тоді u можна зобразити у вигляді всеможливих сум типу $\sum_{k=1}^{\infty} g_k\left(t_1,\ldots,t_{n-1}\right)\otimes h_k\left(t_n\right)$ і

$$\|u\|_{L_p\left(R^{n-1}\right)\hat{\otimes} L_p(R)} = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \left\|g_k\left(t_1,\ldots,t_{n-1}\right)\right\|^p_{L_p\left(R^{n-1}\right)} \left\|h_k\left(t_n\right)\right\|^p_{L_p(R)} =$$

$$= \inf \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{R^{n-1}} \left|g_k\left(t_1,\ldots,t_{n-1}\right)\right|^p dt_1\ldots dt_{n-1} \right)^{p/p} \left(\int_R \left|h_k\left(t_n\right)\right|^p dt_{n-1} \right)^{p/p} =$$

$$= \inf \sum_{k=1}^{\infty} \int_{R^{n-1}} \left|g_k\left(t_1,\ldots,t_{n-1}\right)\right|^p dt_1\ldots dt_{n-1} \int_R \left|h_k\left(t_n\right)\right|^p dt_{n-1} =$$

$$= \inf \sum_{k=1}^{\infty} \int_{R^{n-1}} \left|g_k h_k\right|^p dt = \|u\|^p_{L_p\left(R^n\right)} .$$

Отже, справджується ізометричний ізоморфізм

$$L_p\left(R^n\right) \cong L_p\left(R^{n-1}\right)\hat{\otimes} L_p(R).$$

Повторюючи аналогічні міркування, приходимо до потрібної ізометрії. Лема доведена.

У просторі $L_p(R)$ розглянемо оператор диференціювання $\frac{d}{dt}$. Тоді оператором диференціювання в просторі $\hat{\otimes}_i L_p(R)$ буде оператор вигляду $D^\alpha = \frac{d^{\alpha_1}}{dt_1^{\alpha_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{d^{\alpha_n}}{dt_n^{\alpha_n}}$ порядку $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$, де $\alpha = \left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$ – цілочислові вектори з невід'ємними координатами.

Кожному числу $\nu > 0$ поставимо у відповідність банахів простір

$$Exp^\nu\left(\frac{d}{dt_i}\right) = \left\{ x^i\left(t_i\right) \in C^\infty(R) : \left\|x^i\right\|_{\nu,p} < \infty \right\}$$

з нормою

$$\left\|x^i\right\|_{\nu,p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{pk}} \left\| \frac{d^{\alpha_i} x^i}{dt_i^{\alpha_i}} \right\|^P_{L_p(R)} \right)^{1/p},$$

де $C^\infty(R)$ – простір нескінченно–диференційовних функцій в R.

Побудуємо проективний тензорний добуток цих просторів $\otimes Exp^\nu\left(\frac{d}{dt_i}\right)$ та його поповнення $\hat{\otimes} Exp^\nu\left(\frac{d}{dt_i}\right)$.

Теорема. *Простір* $\hat{\otimes} Exp^{\nu}\left(\frac{d}{dt_i}\right)$ *збігається з простором цілих функцій експоненціального типу* $\leq \nu$ *, які належать* $L_p\left(R^n\right)$.

Доведення. За теоремою Соболєва

$$\sup_{t \in R^n} |u(t)| \leq c_1 \max\left\{\|u\|_{L_p\left(R^n\right)}, \left\|D^{\alpha} u\right\|_{L_p\left(R^n\right)}\right\},$$

$$\sup_{t \in R^n} \left|D^{k \cdot \alpha} u(t)\right| \leq c c_1 \max\{1, \nu\} \nu^k = c_0 \nu^k, \quad \forall k.$$

Отже, простір $\hat{\otimes} Exp^{\nu}\left(\frac{d}{dt_i}\right)$ міститься в просторі цілих функцій експоненціального типу $\leq \nu$, які належать просторові $L_p\left(R^n\right)$ [5].

Нехай $u(t)$ – ціла функція експоненціального типу $\leq \nu$. Згідно з нерівністю Бернштейна справджується

$$\left\|D^{k \cdot \alpha} u\right\|_{L_p\left(R^n\right)} \leq \nu^k \|u\|_{L_p\left(R^n\right)},$$

тобто $u \in \hat{\otimes} Exp^{\nu}\left(\frac{d}{dt_i}\right)$. Теорема доведена.

1. Радыно Я.В. Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальные уравнения // Дифференциальные уравнения. 1985. Т.21. №9. С. 1559–1569. 2. Лопушанський О.В. Операторне числення на ультрагладких векторах // Укр. мат. журн. 1992. Т.44. №4. С. 502–513. 3. Горбачук М.Л. Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. 1995. Т.47. №5. С. 616–628. 4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.М., 1969.

УДК 517.927

В.В. Волошин, В.М. Цимбал
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗАДАЧА БІЦАДЗЕ-САМАРСЬКОГО ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Розглянуто сингулярно збурену задачу Біцадзе-Самарського для звичайного диференціального рівняння другого порядку. Методом примежового шару отримано асимптотичне розвиненя розв”язку цієї задачі.

Singularly perturbed Bitsadze-Samarsky problem to ordinary differential equation of the second order is considered. By application of the boundary layer method an asymptotic expantion of solution of this problem is obtained.