$$K(x_{k+1},x_k)=2\left(\sqrt{1+x_{k+1}}+\sqrt{1+x_k}\right),$$
$$K(x_k,x_{k-1})=2\left(\sqrt{1+x_k}+\sqrt{1+x_{k-1}}\right),$$
$$K^{[1]}(x,\alpha)\equiv 1;\quad K^{\{1\}}(x,\alpha)\equiv 1;\quad K^{[1]\{1\}}(x,\alpha)\equiv 0\ .$$

Підставимо знайдені дані у формулу (16), після спрощення одержимо рекурентну формулу для рівняння (25)

$$y_{k+1}+\left[2hp\left(\sqrt{1+x_{k+1}}-\sqrt{1+x_k}\right)-1-\frac{\sqrt{1+x_{k+1}}-\sqrt{1+x_k}}{\sqrt{1+x_k}-\sqrt{1+x_{k-1}}}\right]y_k+$$
$$+\frac{\sqrt{1+x_{k+1}}-\sqrt{1+x_k}}{\sqrt{1+x_k}-\sqrt{1+x_{k-1}}}\,y_{k-1}=0\ .$$

Аналогічно, як і в попередньому прикладі, дістанемо наближення мінімального власного значення задачі (23), (24)

$$p_1=p_{min}=11.898455775\ .$$

Зауваження.

Для власного значення p_1 відомі [4] такі оцінки:

$$11.88655\le p_1\le 12.00455\ ,$$

де нижня оцінка одержана методом функції Гріна, а верхня – методом Рітца.

1. Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. Львів, 1994. 2. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. М., 1968. 3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями: Пер. с нем. М., 1968. 4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1957.

УДК 518.12

Л.І. Захаревич, Г.М. Коваль, Г.Г.Цегелик
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики
Львівський національний університет ім. І.Франка

МЕТОД ПАРАМЕТРІВ ВІДШУКАННЯ НИЖНЬОЇ МЕЖІ НУЛІВ АЛГЕБРАЇЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ВІД ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Розглядається використання методу параметрів для відшукання нижньої межі нулів алгебраїчних многочленів від двох дійсних змінних.

We consider the using of the method of parameters for finding the lower bound of zeros of the algebraic polinomials of two real variables.

У [1] запропонований універсальний метод локалізації за модулем нулів многочленів, степеневих рядів і рядів Лорана, який в літературі називається методом параметрів. За допомогою цього методу можна одержати як частковий випадок багато (якщо не всі!) відомих результатів з локалізації за модулем нулів многочленів і рядів. Зокрема, це стосується таких фундаментальних праць, як [2,3]. Пізніше цей метод був використаний для локалізації нулів поліномів і рядів Діріхле, квазіполіномів, рядів Тейлора-Діріхле тощо. В [4] на основі методу параметрів розв'язана обернена задача до задачі локалізації коренів алгебраїчних многочленів.

У цій статті розглянуто використання методу параметрів для відшукання нижньої межі нулів алгебраїчних многочленів від двох дійсних змінних.

Розглянемо алгебраїчний многочлен

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}A_{kl}x^k y^l \qquad (1)$$

з дійсними коефіцієнтами. Нижньою межею нулів многочлена $f(x,y)$ в півплощині $y \geq 0$ будемо називати криву $y = y(x)$ таку, що $f(x,y)$ не має нулів в області

$$0 \leq y < y(x),\ x \in (-\infty;\ \infty).$$

Аналогічно визначається нижня межа нулів многочлена (1) в півплощині $x \geq 0$.

Покажемо, як метод параметрів можна використати для наближеного знаходження кривої $y = y(x)$.

Запишемо многочлен (1) у вигляді

$$f(x,y)=\sum_{l=0}^{m}\varphi_l(x)y^l,$$

де

$$\varphi_l(x)=\sum_{k=0}^{n}A_{kl}x^k \quad (l=0,1,\ldots,m).$$

Припустимо, що $\varphi_0(x)>0$ для всіх $x\in[a,b]$ і

$$\varphi_l(x)=\varphi_{l1}(x)+\varphi_{l2}(x) \quad (l=1,2,\ldots,m),$$

де $\varphi_{l1}(x)\geq 0$, $\varphi_{l2}(x)\leq 0$ для $x\in[a,b]$.

Якщо $\varphi_{l1}(x)\neq 0$, то індекс l віднесемо до множини M_1; якщо $\varphi_{l2}(x)\neq 0$, то індекс l – до множини M_2.

Розглянемо рівняння

$$\sum_{l=0}^{m}\varphi_l(x)y^l=0,$$

яке представимо у вигляді

$$\varphi_0(x)+\sum_{l\in M_1}\varphi_{l1}(x)y^l=-\sum_{l\in M_2}\varphi_{l2}(x)y^l.$$

З цього рівняння при $y\geq 0$ одержуємо таку нерівність:

$$\varphi_0(x)\leq\sum_{l\in M_2}a_l(x)y^l, \qquad (2)$$

де

$$a_l(x)=-\varphi_{l2}(x)>0,\ x\in[a,b].$$

Нехай $\{\alpha_l\}$, $l\in M_2$, і α_0 — будь-який набір додатних чисел (параметрів), який задовольняє умову

$$\sum_{l\in M_2}\alpha_l = \alpha_0 . \tag{3}$$

Для кожного фіксованого $x \in [a,b]$ визначимо

$$r_x = \min_{l\in M_2}\left(\frac{\varphi_0(x)\alpha_l}{a_l(x)\alpha_0}\right)^{\frac{1}{l}} \tag{4}$$

Теорема . Многочлен $f(x,y)$ не має нулів в області

$$0 \le y < r_x,\ \ x \in [a,b]. \tag{5}$$

<u>Доведення</u> . Для кожного фіксованого $x \in [a,b]$ із (4) випливає

$$a_l(x)r_x^l \le \frac{\varphi_0(x)}{\alpha_0}\alpha_l , \quad l \in M_2 .$$

Підсумуємо цю нерівність за всіма $l \in M_2$, одержимо

$$\sum_{l\in M_2} a_l(x)r_x^l \le \frac{\varphi_0(x)}{\alpha_0}\sum_{l\in M_2}\alpha_l .$$

Якщо використати умову (3), то

$$\sum_{l\in M_2} a_l(x)r_x^l \le \varphi_0(x) .$$

Звідси випливає, що для кожного фіксованого $x \in [a,b]$ при $\rho_x < r_x$ виконується нерівність

$$\sum_{l\in M_2} a_l(x)\rho_x^l < \varphi_0(x) . \tag{6}$$

Покажемо, що $f(x,y)$ не має нулів в області (5).

Справді, припустимо від протилежного, що в області (5) існує точка (x_0,y_0) така, що $f(x_0,,y_0) = 0$. Тоді для цієї точки буде виконуватись нерівність (2), тобто

$$\varphi_0(x_0) \le \sum_{l\in M_2} a_l(x_0)y_0^l ,$$

яка суперечить нерівності (6) при $x = x_0$, $\rho_x = y_0$.

Отже, зроблене припущення неправильне, многочлен (1) не має нулів в області (5). Теорема доведена.

Для кожного фіксованого $x \in [a,b]$ додатний корінь рівняння

$$\sum_{l\in M_2} a_l(x)y^l = \varphi_0(x) \tag{7}$$

позначимо через y_x. Будемо вибирати параметри $\{\alpha_l\}$, $l \in M_2$, і α_0 так, щоб для кожного фіксованого $x \in [a,b]$ мінімум в (4) досягався для всіх індексів $l \in M_2$.

Тоді із теореми одержимо такий наслідок.

<u>Наслідок.</u> Многочлен $f(x,y)$ не має нулів в області $0 \le y < y_x$, $x \in [a,b]$.

Маючи рівняння (7), легко побудувати числовий метод для наближеного знаходження кривої $y = y(x)$, яка є нижньою межею коренів многочлена (1) в півплощині $y \ge 0$, на проміжку $[a,b]$. Справді, виберемо на проміжку $[a,b]$ систему рівновіддалених вузлів

$$x_k = x_0 + kh \quad (k = 0,1,\dots,n), \quad x_0 = a, \quad h = \frac{b-a}{n},$$

і для кожного $x = x_k$ $(k = 0,1,\dots,n)$ знайдемо додатний корінь y_k рівняння (7).

Внаслідок цього одержимо множину точок (x_k, y_k) $(k = 0,1,\dots,n)$, через яку прохо–дить крива $y = y(x)$.

1. Цегелик Г.Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана // Изв. вузов. Математика. 1967. №12. С. 90-96. 2. Ostrowski A. Recherches sur la Methode de Graeffe et les zeros des polynomes et des series de Laurent. // Acta math., 1940, 72. P. 99-257. 3. Костовский А.Н. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Львов, 1967. 208 с. 4. Цегелик Г.Г., Коваль Г.М. Метод параметрів розв'язування прямої і оберненої задач локалізації коренів алгебраїчних многочленів // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 1999. Вип.1. С.243-249.

УДК 517.926.25

М.І. Плеша
Національний університет ім. Ів. Франка

БАР'ЄРИ В ОБЛАСТЯХ З РЕБРАМИ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглядається задача Діріхле для квазілінійних еліптичних недивергентних рівнянь другого порядку в області з ребрами. Побудовано бар'єрні функції для задачі і отримано майже найкращі оцінки для її розв'язків.

We consider the Dirichlet problem for the quasilinear elliptic nondivergence equations of second order in a domain with edges. Barrier functions are constructed for the problem and, by comparsion principle we obtain a priori almost best possible estimates of solutions.

Під час дослідження поведінки розв'язків крайових задач для еліптичних рівнянь в околі нерегулярної граничної точки велике значення мають бар'єрні функції [1–4]. У цій роботі побудовано бар'єр для певного класу квазілінійних еліптичних операторів і одержано в околі ребра майже точку (про що свідчать часткові випадки, для лінійних рівнянь [1]) оцінку розв'язку задачі Діріхле

$$\begin{cases} a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_i x_j} + a(x,u,u_x) = 0, & x \in G \quad (1) \\ u(x) = 0, & x \in \partial G \quad (2) \end{cases}$$

(за індексами, які повторюються, підсумовуємо від 1 до n), де G – n-вимірна область, що містить ребро. У роботі [1] побудовано бар'єр для *лінійних* рівнянь в околі ребра. Бар'єри для дивергентного квазілінійного рівняння в околі конічної точки наведено в роботі [2] (див. також літературу, наведену там). Знання поведінки розв'язків поблизу ребра є важ-ливим, зокрема, для фізичних застосувань і може бути використане при обгрунтуванні числових алгоритмів розв'язування задач.