УДК 517.9

О. В. Махней
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра будівельної механіки

ПРО ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ УЗАГАЛЬНЕНОГО КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У цій статті наведено узагальнення інтегральної ознаки стійкості Ляпунова для несамоспряженого узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку.

In this article the generalization of the integral Liapunov criterion of stability for the non-self-adjoint generalized quasidifferential equation of the second order is given.

Для звичайного диференціального рівняння $y'' + p(x)y = 0$ з невід'ємним кусково-неперервним ω-періодичним коефіцієнтом $p(x)$ добре відома достатня ознака стійкості О. М. Ляпунова.

Якщо виконана умова

$$0 < \omega \int_0^\omega p(t)dt \le 4\,, \tag{1}$$

то всі розв'язки цього рівняння разом з похідною першого порядку обмежені на $(-\infty;\infty)$ [1].

Цьому результату можна надати загальне формулювання: нехай коефіцієнт $p(x)$ диференціального рівняння $y'' + p(x)y = 0$ є невід'ємним і кусково-неперервним на $[0,\omega]$; якщо виконана умова (1), то власні значення фундаментальної матриці $B(\omega,0)$ цього рівняння (їх ще називають мультиплікаторами цього рівняння) лежать на одиничному колі і різні. Таке формулювання зручне тим, що воно не вимагає введення поняття стійкості для рівнянь з узагальненими коефіцієнтами і, як мінімум, дозволяє "обійти" теорію Флоке.

Розглянемо квазідиференціальне рівняння другого порядку

$$\left(a_0 y' + a_1 y\right)' + a_2 y = 0\,, \tag{2}$$

де $a_0^{-1}(x)$ – обмежена, вимірна і додатна на заданому інтервалі $[0,\omega]$ функція; $a_1 \in L_2[0,\omega]$, $a_1 \ge 0$, $a_2 = b_2'$ – міра, $b_2 \in BV^+[0,\omega]$ і не спадає на $[0,\omega]$.

Якщо ввести квазіпохідну $y^{[1]} = a_0 y' + a_1 y$, то за допомогою вектора $\overline{y} = \left(y, y^{[1]}\right)^T$ рівняння (2) зводиться до системи вигляду

$$\overline{y}' = C'(x)\overline{y} : \begin{pmatrix} y(x) \\ y^{[1]}(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a_1(x)a_0^{-1}(x) & a_0^{-1}(x) \\ -a_2(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ y^{[1]}(x) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Тут матриця стрибків $\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta b_2(x) & 0 \end{pmatrix}$. Оскільки $[\Delta C(x)]^2 = 0$, то система (3) є коректною, тобто розв'язок початкової задачі для неї існує і єдиний в допустимому класі. До системи (3) можна розглянути спряжену систему квазідиференціальних рівнянь

$$\begin{pmatrix} z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = -\begin{pmatrix} -a_1 a_0^{-1} & -a_2 \\ a_0^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix},$$

з якої легко знайти спряжену квазіпохідну $z^{\{1\}} = -a_0 z'$. Фундаментальна матриця системи (3) має структуру

$$B(x,\alpha) = \begin{pmatrix} K^{\{1\}}(x,\alpha) & K(x,\alpha) \\ K^{\{1\}[1]}(x,\alpha) & K^{[1]}(x,\alpha) \end{pmatrix},$$

де $K(x,\alpha)$ – функція Коші квазідиференціального рівняння (2), тобто вона задовольняє це рівняння по змінній x і $K(\alpha,\alpha) = 0$, $K_x^{[1]}(\alpha,\alpha) = 1$ [2].

Власні значення фундаментальної матриці $B(\omega,0)$ (мультиплікатори рівняння (2)) є коренями рівняння

$$\begin{vmatrix} K^{\{1\}}(\omega,0) - \rho & K(\omega,0) \\ K^{\{1\}[1]}(\omega,0) & K^{[1]}(\omega,0) - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$\rho^2 - a(\omega)\rho + e^{-A(\omega)} = 0, \tag{4}$$

де $a(\omega) \equiv K^{\{1\}}(\omega,0) + K^{[1]}(\omega,0)$, а $A(\omega) = \int\limits_0^{\omega} a_0^{-1}(t) a_1(t) dt$.

Очевидно, корені рівняння (4) такі:

$$\rho_{1,2} = \frac{a(\omega) \pm \sqrt{a^2(\omega) - 4e^{-A(\omega)}}}{2}.$$

Якщо $|a(\omega)| > 1 + e^{-A(\omega)}$, то один з цих коренів за модулем більший від одиниці і рівняння (2) нестійке, а якщо $|a(\omega)| < 1 + e^{-A(\omega)}$, то обидва корені ρ_1 і ρ_2 за модулем не перевищують одиницю і рівняння (2) – асимптотично стійке [3]. Оскільки $\rho_1 \rho_2 = e^{-A(\omega)}$, а коефіцієнти характеристичного рівняння (4) дійсні, то корені симетричні як відносно дійсної осі, так і відносно кола $|\rho| = e^{-\frac{A(\omega)}{2}}$. Отже, або корені ρ_1, ρ_2 розташовані на дійсній осі симетрично до кола $|\rho| = e^{-\frac{A(\omega)}{2}}$, або на самому колі симетрично відносно дійсної осі.

Встановлена теорема.

Теорема 1. Якщо виконується умова

$$0 < R_1(\omega,0) \int\limits_0^{\omega} db_2(t) \le 4e^{-\int\limits_0^{\omega} a_1(t) a_0^{-1}(t) dt}, \tag{5}$$

де

$$R_1(\omega,0) = \int\limits_0^{\omega} a_0^{-1}(t) dt,$$

то узагальнене квазідиференціальне рівняння (2) – асимптотично стійке.

Доведення. Легко встановити, що функція Коші для рівняння

$$\left(a_0 y' + a_1 y\right)' = 0 \tag{6}$$

має вигляд

$$R(x,\alpha) = \int_{\alpha}^{x} a_0^{-1}(t) e^{-\int_t^x a_1(\tau) a_0^{-1}(\tau) d\tau} dt .$$

Тоді фундаментальна матриця системи диференціальних рівнянь, яка відповідає рівнянню (6), матиме вигляд

$$B_1(x,\alpha) = \begin{pmatrix} R^{\{1\}}(x,\alpha) & R(x,\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $R^{\{1\}}(x,\alpha) = e^{-\int_\alpha^x a_0^{-1}(t) a_1(t) dt}$.

Позначимо $K^{\{1\}}(x,0) = \varphi(x)$, $K(x,0) = \psi(x)$. При $\lambda = 1$ будуть справедливими такі інтегральні рівняння [4]:

$$\psi(x) = R(x,0) - \lambda \int_0^x R(x,\alpha) \psi(\alpha) db_2(\alpha), \tag{7}$$

$$\psi^{[1]}(x) = 1 - \lambda \int_0^x \psi(\alpha) db_2(\alpha), \tag{8}$$

$$\varphi(x) = R^{\{1\}}(x,0) - \lambda \int_0^x R(x,\alpha) \varphi(\alpha) db_2(\alpha). \tag{9}$$

Їх можна отримати, скориставшись формулою Коші для неоднорідного рівняння (тут в рівнянні (2) “неоднорідністю” буде $a_2 y$). Розв’язки цих інтегральних рівнянь шукаємо у вигляді рядів $\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) \lambda^k$, $\psi^{[1]}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^{[1]}(x) \lambda^k$, $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \lambda^k$; підставивши їх у (7) – (9), прийдемо до таких співвідношень:

$$\psi_0(x) = R(x,0),\ \psi_0^{[1]}(x) = 1,\ \varphi_0(x) = R^{\{1\}}(x,0),$$

$$\psi_k(x) = (-1)^k \int_0^x db_2(x_1) \int_0^{x_1} db_2(x_2) \ldots \int_0^{x_{k-1}} R(x,x_1) \times$$
$$\times R(x_1,x_2) \ldots R(x_{k-1},x_k) R(x_k,0) db_2(x_k),$$

$$\psi_k^{[1]}(x) = (-1)^k \int_0^x db_2(x_1) \int_0^{x_1} db_2(x_2) \ldots \int_0^{x_{k-1}} R(x_1,x_2) \times$$
$$\times R(x_2,x_3) \ldots R(x_{k-1},x_k) R(x_k,0) db_2(x_k),$$

$$\varphi_k(x) = (-1)^k \int_0^x db_2(x_1) \int_0^{x_1} db_2(x_2) \ldots \int_0^{x_{k-1}} R(x,x_1) \times$$
$$\times R(x_1,x_2) \ldots R(x_{k-1},x_k) R^{\{1\}}(x_k,0) db_2(x_k),\ k \ge 1.$$

Тоді

$$a(\omega) \equiv \varphi(\omega) + \psi^{[1]}(\omega) = R^{\{1\}}(\omega,0) + 1 - I_1 + I_2 + \ldots + (-1)^k I_k + \ldots, \qquad (10)$$

де

$$I_1 = \int_0^{\omega} \left[R(\omega, x_1) R^{\{1\}}(x_1, 0) + R(x_1, 0) \right] db_2(x_1),$$

$$I_k = \int_0^{\omega} db_2(x_1) \int_0^{x_1} db_2(x_2) \ldots \int_0^{x_{k-1}} R(x_1, x_2) R(x_2, x_3) \ldots R(x_{k-1}, x_k) \times$$
$$\times \left[R(\omega, x_1) R^{\{1\}}(x_k, 0) + R(x_k, 0) \right] db_2(x_k).$$

Доведемо, що $I_{k+1} < I_k$. Якщо ця нерівність виконується, то ряд (10) є рядом Лейбніца. Звідси випливає оцінка

$$1 + e^{-\int_0^{\omega} a_0^{-1}(t) a_1(t) dt} - I_1 < a(\omega) < 1 + e^{-\int_0^{\omega} a_0^{-1}(t) a_1(t) dt}. \qquad (11)$$

Для доведення нерівності $I_{k+1} < I_k$ використовується оцінка на $[0, \omega]$

$$R_1(x, \alpha) e^{-\int_{\alpha}^{x} a_0^{-1}(t) a_1(t) dt} \le R(x, \alpha) \le R_1(x, \alpha),$$

а також властивості функції $R_1(x, \alpha)$: при $0 \le p < q < r \le \omega$ виконується

$$R_1(q, p) + R_1(r, q) = R_1(r, p),$$
$$R_1(\omega, r) + R_1(p, 0) < R_1(\omega, 0)$$

(за рахунок адитивної властивості інтеграла Лебега і додатності підінтегральної функції). Враховуючи це, отримаємо, що

$$I_1 \le R_1(\omega, 0) \int_0^{\omega} db_2(t). \qquad (12)$$

Крім того, скориставшись нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним, а також умовою (5), отримаємо ланцюг нерівностей

$$I_{k+1} \le \int_0^{\omega} db_2(x_1) \int_0^{x_1} db_2(x_2) \ldots \int_0^{x_{k-1}} R(x_1, x_2) R(x_2, x_3) \ldots R(x_{k-1}, x_k) \times$$
$$\times \left\{ \int_0^{x_k} \frac{\left[R(\omega, x_1) R^{\{1\}}(x_{k+1}, 0) + R(x_{k+1}, 0) + R(x_k, x_{k+1}) \right]^2}{4} db_2(x_{k+1}) \right\} db_2(x_k) \le$$

$$\le \int_0^{\omega} db_2(x_1) \int_0^{x_1} db_2(x_2) \ldots \int_0^{x_{k-1}} R(x_1, x_2) R(x_2, x_3) \ldots R(x_{k-1}, x_k) \times$$

$$\times \left[R(\omega, x_1) R^{\{1\}}(x_k, 0) + R(x_k, 0) \right] \times \left\{ \int_0^{x_k} \frac{\left[R_1(\omega, x_1) + R_1(x_{k+1}, 0) + R_1(x_k, x_{k+1}) \right]^2}{4 \left(R_1(\omega, x_1) e^{-\int_{x_1}^{\omega} a_0^{-1}(t) a_1(t) dt - \int_0^{x_k} a_0^{-1}(t) a_1(t) dt} + R_1(x_k, 0) e^{-\int_0^{x_k} a_0^{-1}(t) a_1(t) dt} \right)} \times \right.$$

$$\times db_2(x_{k+1})\}db_2(x_k) < \int_0^{\omega} db_2(x_1)\int_0^{x_1} db_2(x_2)\ldots\int_0^{x_{k-1}} R(x_1,x_2)R(x_2,x_3)\ldots R(x_{k-1},x_k)\times$$

$$\times\left[R(\omega,x_1)R^{\{1\}}(x_k,0)+R(x_k,0)\right]\frac{\left[R_1(\omega,x_1)+R_1(x_k,0)\right]R_1(\omega,0)}{4e^{-\int_0^{\omega} a_0^{-1}(t)a_1(t)dt}\left(R_1(\omega,x_1)+R_1(x_k,0)\right)}\times$$

$$\times\int_0^{x_k} db_2(x_{k+1})db_2(x_k) \le I_k\,\frac{1}{4}R_1(\omega,0)\int_0^{\omega} db_2(t)e^{\int_0^{\omega} a_0^{-1}(t)a_1(t)dt} \le I_k\,.$$

З нерівностей (5), (11) і (12) випливає оцінка

$$1-3e^{-A(\omega)} < a(\omega) < 1+e^{-A(\omega)},$$

а, отже, і стійкість.

Якщо $a_1(x)\equiv 0$, то з цієї теореми випливає результат М. Стасюк:

Теорема 2. При виконанні умови

$$0 < R_1(\omega,0)\int_0^{\omega} db_2(t) \le 4\,,$$

існує оцінка

$$|a(\omega)| < 2$$

і мультиплікатори рівняння

$$(a_0y')' + a_2y = 0 \tag{13}$$

(корені характеристичного рівняння $\rho^2 - a(\omega)\rho + 1 = 0$) ρ_1 і ρ_2 комплексно спряжені, лежать на одиничному колі, тобто узагальнене квазідиференціальне рівняння (13) – асимптотично стійке [5].

Якщо $a_0(x)\equiv 1$, а $b_2(x)$ – абсолютно неперервна функція, то з теореми 2 випливає класичний результат Ляпунова [1] (він наведений на початку статті).

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 2. Стасюк М. Ф., Кисилевич В. В., Таций Р. М. Общие квазидифференциальные уравнения с мерами. К., 1985. 3. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972. 4. Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Про одну систему завантажених інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: 1990. № 242. С. 111-113. 5. Стасюк М. Ф. Узагальнення інтегрального критерію стійкості Ляпунова // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”: 1994. № 277. С. 139-142.