Зауваження. Якщо оператор-функції $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n+r}$ мають інтегровні за Лебегом на [0, 1] похідні, то в формулах (5) – (7) o(1) можна замінити на $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$, а в формулах (9) – (10) – на $O\left(\frac{1}{k^{1+1/d}}\right)$.

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976. 2. Лянце В.Э. О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами // Докл. АН СССР. 1972. 204, N 3. С. 542–545. 3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. Сторож О.Г. Асимптотические формулы для собственных значений оператора, родственного дифференциальному, нечетного порядка // Дифференц. уравнения. 1981. 17, N 4. С. 744–746.

УДК 517.944

М.Б.Воробець
Національний університет ”Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики та програмування

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ

На підставі узагальненого методу відокремлення змінних пропонується операційний метод побудови розв'язку задачі Коші для неоднорідної системи рівнянь із частичними похідними другого порядку за часом та необмеженого порядку за просторовими змінними.

On the basis of a generalized separation of variables method we propose an operator method of the solution construction of the Cauchy problem for a nonhomogeneous system of partial differential equations of the second order on time variable and infinite order on spatial variables.

У класі функцій $A_\beta = \{\varphi(x), x \in R^q : \varphi(z)$ — ціла в C^q функція, причому порядку, нижчого за $(\beta-1)^{-1}\beta$ за сукупністю змінних, якщо $1<\beta<\infty$; довільного скінченного порядку за сукупністю змінних, якщо $\beta = 1$; довільного порядку за сукупністю змінних, якщо $0 \le \beta < 1$; експоненціального типу за кожною змінною, якщо $\beta = 1\}$, де $\beta \in R^1_+ \cup \{+\infty\}$ на підставі узагальненого методу відокремлення змінних [1] в області змінних $t>0, x=(x_1, x_2, \ldots, x_q) \in R^q$ будемо вивчати таку задачу Коші:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)\equiv\left(E_n\frac{\partial^2}{\partial t^2}-A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}-B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)U(t,x)=F(t,x)\ , \quad (1)$$

$$\frac{\partial^s U}{\partial t^s}(0,x)=0,\quad s=0,1\ , \quad (2)$$

де $U(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x))^\tau$; $\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},...,\frac{\partial}{\partial x_q}\right)$; $F(t,x)=(f_1(t,x),f_2(t,x),...,f_n(t,x))^\tau$;

$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — оператор-матриці розміру $n\times n$, елементами яких є довільні диференціальні вирази $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ з цілими в C^q символами $a_{ij}(\alpha),b_{ij}(\alpha),i,j=\overline{1,n}$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q)\in C^q$, τ — символ транспонування, E_n — одинична матриця розміру $n\times n$.

Позначимо символом $\varphi(\xi,\alpha)$ визначник матриці $L(\xi,\alpha)=\left\|l_{kj}(\xi,\alpha)\right\|_{k,j=\overline{1,n}}$, а через $l_{kj}^{\vee}(\xi,\alpha)$ — алгебраїчні доповнення елементів $l_{jk}(\xi,\alpha)$ матриці $L(\xi,\alpha)$, $\psi(\xi,\alpha)$ — найбільший спільний дільник елементів $l_{kj}^{\vee}(\xi,\alpha)$, $k,j=\overline{1,n}$ (з коефіцієнтом при старшому степені, який дорівнює 1). Нехай $deg\,\psi(\xi,\alpha)=r$ за змінною ξ, $r<2n$.

Позначимо $\frac{L^{\vee}(\xi,\alpha)}{\psi(\xi,\alpha)}=C(\xi,\alpha)$, $C(\xi,\alpha)=\left\|c_{ij}(\xi,\alpha)\right\|_{i,j=\overline{1,n}}$, де $L^{\vee}(\xi,\alpha)=\left\|l_{kj}^{\vee}(\xi,\alpha)\right\|_{k,j=\overline{1,n}}$.

Нехай $det\,C(\xi,\alpha)=\chi(\xi,\alpha)$. Розписавши покомпонентно, отримаємо $c_{kj}(\xi,\alpha)=\frac{l_{kj}^{\vee}(\xi,\alpha)}{\psi(\xi,\alpha)}$, $k,j=\overline{1,n}$. Крім цього, виконуються співвідношення

$$\sum_{j=1}^{n}l_{kj}(\xi,\alpha)l_{mj}^{\vee}(\xi,\alpha)=\delta_{km}\varphi(\xi,\alpha)\ ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}l_{kj}(\xi,\alpha)c_{mj}(\xi,\alpha)=\delta_{km}\chi(\xi,\alpha),\quad k,m=\overline{1,n},$$

де $\delta_{km}=\begin{cases}0,k\neq m,\\1,k=m\end{cases}$, $k,m=\overline{1,n}$.

Нехай $V(t,\alpha)$ — розв’язок такої задачі Коші:

$$\chi\left(\frac{d}{dt},\alpha\right)V(t,\alpha)\equiv\left(\frac{d^{2n-r}}{dt^{2n-r}}+\sum_{i=1}^{2n-r}\eta_i(\alpha)\frac{d^{2n-r-i}}{dt^{2n-r-i}}\right)V(t,\alpha)=0\ , \quad (4)$$

$$\frac{d^kV}{dt^k}(0,\alpha)=\delta_{k,2n-r-1},k=\overline{0,2n-r-1}. \quad (5)$$

У роботі [2] показано, що функції вигляду

$$v_{1km}(t,\alpha)=c_{km}\left(\frac{d}{dt},\alpha\right)V(t,\alpha)\ , \quad (6)$$

$$v_{0km}(t,\alpha)=\frac{d}{dt}v_{1km}(t,\alpha)-\sum_{r=1}^{n}a_{rm}(\alpha)v_{1km}(t,\alpha), k,m=\overline{1,n}\quad, \tag{7}$$

задовольняють таку задачу Коші:

$$\sum_{j=1}^{n}l_{kj}\left(\frac{d}{dt},\alpha\right)v_{sjk}(t,\alpha)=0, k=\overline{1,n}, s=0,1\quad, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &v_{1km}(0,\alpha)=0, \qquad \frac{dv_{1km}}{dt}(0,\alpha)=\delta_{km},\\ &v_{0km}(0,\alpha)=\delta_{km}, \quad \frac{dv_{0km}}{dt}(0,\alpha)=0, \quad k,m=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{9}$$

Формальний розв'язок задачі (1),(2) визначається за формулою

$$U^{\tau}(t,x)=F^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{C^{\tau}(\xi,\alpha)exp(\alpha\cdot x)}{\chi(\xi,\alpha)}\left(E_n\, exp(\xi \qquad t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-V_0^{\tau}(t,\alpha)-\xi V_1^{\tau}(t,\alpha)\right)\right)\Bigg|_{\substack{\xi=0\\ \alpha=0}}, \tag{10}$$

де $V_s(t,\alpha)=\left\|v_{skj}(t,\alpha)\right\|_{k,j=\overline{1,n}}, s=0,1, \alpha\cdot x=\sum_{j=1}^{q}\alpha_j x_j$.

Розписавши покомпонентно, отримаємо

$$u_k(t,x)=\sum_{j=1}^{n}f_j\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left\{\frac{exp(\alpha\cdot x)}{\varphi(\xi,\alpha)}\left(c_{jk}(\xi,\alpha)exp(\xi \qquad t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{s=1}^{n}c_{js}(\xi,\alpha)\left(v_{0js}(t,\alpha)+\xi v_{1js}(t,\alpha)\right)\right)\right\}\Bigg|_{\substack{\xi=0\\ \alpha=0}}, \; k=\overline{1,n}\ . \tag{11}$$

Для виділення класу існування та єдиності розв’язку задачі (1),(2) потрібно дослідити поведінку функції $V(t,\alpha)$ за параметрами $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$. Оскільки за припущенням $a_{kj}(\alpha), b_{kj}(\alpha), k,j=\overline{1,n}$ є цілими в C^q функціями, то коефіцієнти $\eta_k(\alpha)$, $k=\overline{0,2n-r-1}$ полінома $\chi(\xi,\alpha)$ як суперпозиції цілих функцій теж будуть цілими функціями параметрів $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$. За теоремою Пуанкаре [3] про аналітичну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів маємо, що функція $V(t,\alpha)$ як розв'язок задачі (4),(5) є цілою функцією відносно $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$. Порядок функції $V(t,\alpha)$ за сукупністю параметрів $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$ обчислюється за формулою [4]

$$\Theta=\begin{cases}\max\limits_{k=\overline{1,2n-r}}\left\{k^{-1}\deg\eta_k(a)\right\}, \text{якщо всі } a_{ij}(a), b_{ij}(a) \text{ - поліноми}, \; i,j=\overline{1,n}\\ \infty \text{ - в інших випадках} \qquad ,\end{cases} \tag{12}$$

де $deg\,\eta_k(\alpha)$ - степінь полінома $\eta_k(\alpha)$ за сукупністю змінних $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$.

Теорема . Нехай $a_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), b_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), k,j=\overline{1,n}$ є довільними диференціальними операторами з цілими в C^q символами $a_{kj}(\alpha), b_{kj}(\alpha)$. Нехай, крім того, функції $f_k(t,x), k=\overline{1,n}$, для фіксованого $t > 0$ належать до класу A_Θ, де індекс Θ визначений рівністю (12). Тоді у класі вектор-функцій, компоненти яких $u_k(t,x), k = \overline{1,n}$, для фіксованого $t > 0$ належать до A_Θ, існує єдиний розв'язок задачі (1),(2), який можна подати у вигляді (11).

Доведення. Покажемо, що формальний розв'язок задачі (1),(2) визначається формулами (10),(11). Дійсно, виконання співвідношень (9) забезпечує виконання початкових умов (2) для розв'язку (10) задачі (1),(2). З того факту, що $v_{skm}(t,\alpha), k = \overline{1,n}$ є розв'язками системи рівнянь (8) для $s = 0,1, m = \overline{1,n}$, маємо

$$\sum_{j=1}^{n} l_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial \quad t},\frac{\partial}{\partial \quad x}\right)\frac{exp(\quad \alpha\cdot x)}{\chi(\xi,\alpha)}\left(\sum_{m=1}^{n} f_m\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\Big(c_{mj}(\xi,\alpha)exp(\xi \quad t)-\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{s=1}^{n} c_{sj}(\xi,\alpha)\big(v_{0js}(t,\alpha)+\xi v_{1js}(t,\alpha)\big)\Big)\right)\right|_{\xi=0,\alpha=0} =$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left\{ f_m\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\sum_{j=1}^{n} l_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial \quad t},\frac{\partial}{\partial \quad x}\right)\Big(c_{mj}(\xi,\alpha)exp(\xi \quad t)-\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{s=1}^{n} c_{sj}(\xi,\alpha)\big(v_{0js}(t,\alpha)+\xi v_{1js}(t,\alpha)\big)\Big)\frac{exp(\alpha\cdot x)}{\chi(\xi,\alpha)}\right\}\right|_{\substack{\xi=0\\ \alpha=0}} =$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left\{ f_m\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\frac{exp(\alpha\cdot x)}{\chi(\xi,\alpha)}\left(exp(\xi \quad t)\sum_{j=1}^{n} l_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial \quad t},\alpha\right)c_{mj}(\xi,\alpha)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} l_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial \quad t},\alpha\right)c_{sj}(\xi,\alpha)\big(v_{0js}(t,\alpha)+\xi v_{1js}(t,\alpha)\big)\right)\right\}\right|_{\substack{\xi=0\\ \alpha=0}} =$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left\{ f_m\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\frac{exp(\alpha\cdot x)}{\chi(\xi,\alpha)}\Big(exp(\xi \quad t)\delta_{km}\chi(\xi,\alpha)-\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{s=1}^{n} c_{sj}(\xi,\alpha)\sum_{j=1}^{n} l_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial \quad t},\alpha\right)\big(v_{0js}(t,\alpha)+\xi v_{1js}(t,\alpha)\big)\Big)\right\}\right|_{\substack{\xi=0\\ \alpha=0}} =$$

$$=\left.\left\{ f_k\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)exp\big(\alpha\cdot x+\xi \quad t\big)\right\}\right|_{\substack{\xi=0\\ \alpha=0}} = f_k(t,x), k=\overline{1,n} \quad .$$

Отже, формула (11) справді визначає формальний розв'язок задачі (1),(2).

Як було зазначено вище, функція $V(t,\alpha)$ є цілою відносно $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$ функцією, порядок якої (за сукупністю змінних) обчислюється за формулою (12). Коефіцієнти диференціальних виразів $c_{km}\left(\frac{d}{dt},\alpha\right), k,m=\overline{1,n}$, очевидно, є також цілими відносно $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$ функціями, причому такими, що функції $v_{skm}(t,\alpha)$ вигляду (6),(7) є цілими функціями порядку Θ за сукупністю параметрів $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$.

Для аналітичних на $R_+^1 \times R^q$ функцій $f_k(t,x)$, які для фіксованого $t > 0$ належать до класу A_Θ, визначимо оператори $f_k\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ через відповідні ряди Тейлора формальною заміною t на $\frac{\partial}{\partial\xi}, x$ на $\frac{\partial}{\partial\alpha}$. Дії диференціальних виразів безмежного порядку $f_k\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ на функції, які містяться в фігурних дужках формули (11), будуть визначені коректно, якщо для кожного фіксованого $t > 0$ $f_k(t,x) \in A_\Theta, k = \overline{1,n}$ [5]. Результат дії $f_k\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ на ці функції для фіксованого $t > 0$ належить теж до A_Θ [5].

Розв'язок задачі (1),(2) вигляду (11) допускає скінченне диференціювання за змінною t та за змінною x. Дії операторів $f_k\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ на відповідні продиференційовані за змінною t та за змінною x вирази при цьому визначені коректно, оскільки функції $v_{skm}(t,\alpha)$ після диференціювання за t є знову цілими відносно $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$ функціями того ж порядку Θ за сукупністю змінних.

Отже, клас вектор-функцій, компоненти яких для кожного фіксованого $t > 0$ належать до A_Θ, є класом існування розв'язку задачі (1),(2). Цей клас вектор-функцій є одночасно й класом єдиності розв'язку задачі (1),(2), оскільки він міститься у відомому класі єдиності,виділеному Г.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим [4].

1.Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. К., 1993. 2. Каленюк П. І. , Нитребич З. М. , Воробець М.Б. Задача Коші для системи диференціальних рівнянь із частинними похідними // Вісник ДУ "Львівська політехніка". 1998. №337. С.110-112. 3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М., 1980. 4.Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958. 5. Леонтьев А.Ф. Обобщения рядов экспонент. М., 1981.

УДК 517.948

Р.Р.Столярчук
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра обчислювальної математики та програмування

ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОГО ДВОСТОРОННЬОГО МЕТОДУ ЧАПЛИГІНСЬКОГО ТИПУ ДО РІВНЯНЬ З НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

З відомих переваг методу Чаплигіна перед іншими методами не завжди можна скористатися не лише через немонотонність та неопуклість відповідних операторів та через потребу практичного знаходження обернених до тих чи інших