Інтеграли, які фігурують у (3), збігаються в середньому у $L_2(\sigma)$, а інтеграли, які фігурують в (1), (2), збігаються в середньому в відповідно $\hat{H}$ та H.

1. Лянце В.Э. О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами // Докл. АН СССР. 1972. 204, N 3. С.542–545. 2. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. К., 1983. 3. Маутнер Ф.И. О разложении по собственным функциям // Успехи мат. наук. 1955. 10, N 4. С.127-132. 4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 5. Aronszajn N., Brown R.D. Finite-dimensional perturbations of spectral problems and variational approximations methods for eigenvalue problems // St. Math.. 1970. 36, N 1. P.1-70. 6. Kato T. On finite-dimensional perturbations of self-adjoint operators // J. of the Math. Soc. Of Jap.. 1957. 9, N 2. P.239–249.

УДК 513.927.25

О.Б. Шувар
Львівський національний університет ім. І. Франка

АСИМПТОТИЧНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА НЕПАРНОГО ПОРЯДКУ В ПРОСТОРІ ВЕКТОР-ФУНКЦІЙ

Встановлено асимптотичну поведінку власних значень для одного класу скінченновимірних збурень диференціального оператора з матричними коефіцієнтами.

Asymptotic behaviour of eigenvalues for a class of finite-dimensional perturbations of odd order differential operator with matrix coefficients is established.

Нехай $P_2(x),\ldots,P_n(x)$ – визначені на [0, 1] неперервні функції, значеннями яких є комплексні матриці порядку $m\times m$ (надалі кожну таку матрицю ототожнюємо з відповідним лінійним оператором, а множину лінійних операторів, що діють в просторі $\mathbf{C}^m$ позначаємо через $\mathbf{B}_m$),

$$l[y]=y^{(n)}+P_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+P_n(x)y \tag{1}$$

$\left(y(x)=(y_1(x),\ldots,y_m(x))\right)$ – диференціальний вираз непарного порядку $n=2\mu-1$.

Далі, нехай $U_\nu=U_{\nu 0}+U_{\nu 1}$, де

$$U_{\nu 0}(y)=A_\nu y^{(k_\nu)}(0)+\sum_{j=0}^{k_\nu-1}A_{\nu j}y^{(j)}(0),\qquad U_{\nu 1}(y)=B_\nu y^{(k_\nu)}(1)+\sum_{j=0}^{k_\nu-1}B_{\nu j}y^{(j)}(0),$$

а $A_\nu, B_\nu, A_{\nu j}, B_{\nu j}\in\mathbf{B}_m$ $(\nu=1,\ldots,n+r,\ r=0,1,\ldots,n)$, причому $n-1\ge k_1\ge\ldots\ge k_n\ge 0$, $n-1\ge k_{n+1}\ge\ldots\ge k_{n+r}\ge 0$; $k_{\nu+2}<k_\nu$, якщо $\nu=1,2,\ldots,n-2,n+1,\ldots n+r-2$; хоча б один з операторів A_ν або B_ν $(\nu=1,\ldots,n+r)$ є ненульовим, а система крайових форм $\{U_1,\ldots,U_n\}$ лінійно незалежна.

Припустимо, що $\varphi_\nu^{(ij)} \in L_2(0,1)$ і покладемо

$$\varphi_\nu(x) = \left(\varphi_\nu^{(ij)}(x)\right)_{i,j=1}^m, \quad \Phi_\nu y = \int_0^1 \varphi_\nu^*(x) y(x) dx, \ \nu = 1, \ldots, n+r, \ y \in L_2^m$$

(тут і далі $L_2^m \overset{\text{def}}{=} L_2\left((0,1); \mathbb{C}^m\right)$). Зрозуміло, що Φ_ν є лінійним неперервним оператором $L_2^m \to \mathbb{C}^m$, спряжений з яким має такий вигляд:

$$\forall h \in \mathbb{C}^m \ (\Phi_\nu^* h)(x) = \varphi_\nu(x) h.$$

Визначимо оператор T за допомогою співвідношень

$$D(T) = \{ y \in L_2^m : y, y', \ldots, y^{(n-1)} \text{ абсолютно неперервні на } [0,1], \quad l[y] \in L_2^m,$$

$$U_\nu(y) = \Phi_\nu y, \quad \nu = 1, \ldots, n \ \}. \tag{2}$$

$$\forall y \in D(T) \quad Ty = t[y] \overset{\text{def}}{=} l[y] + \sum_{\nu=n+1}^{n+r} \Phi_\nu^* y, \tag{3}$$

де D(T) – область визначення оператора T.

У цій статті наведено асимптотичні формули для власних значень оператора T. Відзначимо, що диференціальні оператори з інтегральними крайовими умовами розглядалися багатьма авторами [1]. Але спряжені з ними оператори вже не є диференціальними. Тому природно розглянути оператор T загального вигляду (2)–(3), оскільки T та T^* належать до одного класу в тому сенсі, що вони є диференціально-граничними. Зауважимо також, що T є спорідненим в сенсі [2] з парою (L, L_0), де L та L_0 – відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені в L_2^m диференціальним виразом l[y] (означення – див. [3]), і що у випадку, коли m=1, асимптотику власних значень оператора T досліджували в [4].

1. Покладемо для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda = -\rho^n$ і розіб'ємо всю комплексну $\rho-$площину на 2n секторів S_κ, $\kappa = 0, 1, \ldots, 2n-1$, де

$$S_\kappa = \left\{ \rho : \frac{\kappa\pi}{n} \le \arg\rho \le \frac{(\kappa+1)\pi}{n} \right\}.$$

Через T_κ позначимо сектор (з вершиною в точці $\rho = -c$), що утворюється з S_κ шляхом зсуву $\rho \mapsto \rho + c$. Нехай $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – всі різні корені степеня n з числа –1, занумеровані так, що $\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \le \ldots \le \operatorname{Re}(\rho\omega_n)$, $\rho \in S_\kappa$. Таке означення чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$ є коректним (див. [3]). Розіб'ємо T_κ на дві підобласті $T'_\kappa = \left\{\rho \in T_\kappa : \operatorname{Re}\left((\rho + c)\omega_\mu\right) \le 0\right\}$, $T''_\kappa =$
$= \left\{\rho \in T_\kappa : \operatorname{Re}\left((\rho + c)\omega_\mu\right) \ge 0\right\}$ і покладемо $\tilde{\mu} = \mu$, якщо $\rho \in T'_\kappa$ і $\tilde{\mu} = \mu - 1$, якщо $\rho \in T''_\kappa$. Далі вважатимемо, що ρ міститься в одній з двох фіксованих областей T'_κ або T''_κ. Зрозуміло, що при цьому

$$\operatorname{Re}\left((\rho + c)\omega_1\right) \le \ldots \le \operatorname{Re}\left((\rho + c)\omega_{\tilde{\mu}}\right) \le 0 \le \operatorname{Re}\left((\rho + c)\omega_{\tilde{\mu}+1}\right) \le \ldots \le \operatorname{Re}\left((\rho + c)\omega_n\right).$$

Розглянемо рівняння

$$t[Y] + \rho^n Y \equiv l[Y] + \sum_{\nu=n+1}^{n+r} \Phi_\nu^* U_\nu(Y) + \rho^n Y = 0 \tag{4}$$

відносно невідомої операторної функції Y(x). Має місце таке твердження.

Теорема 1. Рівняння (4) при достатньо великих за модулем $\rho \in T_\kappa$ має рівно n лінійно незалежних розв'язків $Y_1,\ldots,Y_n$, які разом з їхніми похідними до порядку n–1 включно аналітично залежать від ρ при $\rho \in T'_\kappa$ та $\rho \in T''_\kappa$ і мають такий вигляд:

$$Y_j^{(k)}(x,\rho) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^k \left(e^{\rho\omega_j x} 1_m + o(1)\right), \ j = 1,\ldots,\tilde{\mu}, \\ (\rho\omega_j)^k \left(e^{\rho\omega_j x} 1_m + e^{\rho\omega_j} o(1)\right), \ j = \tilde{\mu}+1,\ldots,n, \end{cases} \tag{5}$$

де 1_m – одинична матриця порядку m.

Справедливість цієї теореми випливає з наведених в [3] асимптотичних формул для розв'язків рівняння $l[Y] + \rho^n Y = 0,$ а також з того, що для всіх $\varphi \in L_2\left((0,1); B_m\right)$

$$\int_0^x e^{\rho\omega_j(x-t)}\varphi(t)dt = o(1), \quad j = 1,\ldots,\tilde{\mu}, \tag{6}$$

$$\int_1^x e^{\rho\omega_j(x-t)}\varphi(t)dt = o(1), \quad j = \tilde{\mu}+1,\ldots,n. \tag{7}$$

2. Розв'язок рівняння $t[y] + \rho^n y = 0$ є власною функцією оператора T тоді і тільки тоді, коли він задовольняє умови (2). Виходячи з цього і з теореми 1, доходимо, використовуючи міркування, викладені в [3], до такого висновку.

Теорема 2. Нехай числа $\theta_0,\ \theta_1,$ визначені за допомогою рівності

$$\theta_0 + \theta_1\xi + \cdots + \theta_m\xi^m = \begin{vmatrix} A_1\omega_1^{k_1} \ldots A_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (A_1 + \xi B_1)\omega_\mu^{k_1} & B_1\omega_{\mu+1}^{k_1} \ldots B_1\omega_n^{k_1} \\ A_2\omega_1^{k_2} \ldots A_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (A_2 + \xi B_2)\omega_\mu^{k_2} & B_2\omega_{\mu+1}^{k_2} \ldots B_2\omega_n^{k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n\omega_1^{k_n} \ldots A_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (A_n + \xi B_n)\omega_\mu^{k_n} & B_n\omega_{\mu+1}^{k_n} \ldots B_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix},$$

відмінні від нуля, $\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_m^{(1)}$ (відповідно $\xi_1^{(2)},\ldots,\xi_m^{(2)}$) – корені рівняння

$$\theta_0 + \theta_1\xi + \cdots + \theta_m\xi^m = 0, \tag{8}$$

що відповідають області S_κ з непарним (парним) κ, а $\ln_0 \xi -$ деяке фіксоване значення натурального логарифму.

Кожному d-кратному кореневі $\xi_j^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ рівняння (8) відповідає d послідовностей $\left\{\lambda_{kj}^{(i)}\right\}$ власних значень оператора T, причому

$$\lambda_{kj}^{(1)} = (\mp 2k\pi i)^n \left\{1 \mp \frac{n \ln_0 \xi_j^{(1)}}{2k\pi i} + o(1)\right\}, \tag{9}$$

$$\lambda_{kj}^{(2)} = (\pm 2k\pi i)^n \left\{1 \pm \frac{n \ln_0 \xi_j^{(2)}}{2k\pi i} + o(1)\right\}. \tag{10}$$

Тут верхній знак відповідає числу вигляду n=4q–1, а нижній – числу вигляду n=4q+1.

Якщо d >1, то деякі з $\lambda_{kj}^{(i)}$, що відповідають фіксованому $\xi_j^{(i)}$, можуть бути рівними, утворюючи одне кратне власне значення. При достатньо великих $|\lambda|$ оператор T не має інших власних значень і кратність власного значення $\lambda_{kj}^{(i)}$ дорівнює кількості рівних йому власних значень в формулах (9) – (10), а, отже, не перевищує кратності $\xi_j^{(i)}$ як кореня рівняння (8).

Зауваження. Якщо оператор-функції $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n+r}$ мають інтегровні за Лебегом на [0, 1] похідні, то в формулах (5) – (7) o(1) можна замінити на $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$, а в формулах (9) – (10) – на $O\left(\frac{1}{k^{1+1/d}}\right)$.

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976. 2. Лянце В.Э. О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами // Докл. АН СССР. 1972. 204, N 3. С. 542–545. 3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. Сторож О.Г. Асимптотические формулы для собственных значений оператора, родственного дифференциальному, нечетного порядка // Дифференц. уравнения. 1981. 17, N 4. С. 744–746.

УДК 517.944

М.Б.Воробець
Національний університет ”Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики та програмування

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ

На підставі узагальненого методу відокремлення змінних пропонується операційний метод побудови розв'язку задачі Коші для неоднорідної системи рівнянь із частичними похідними другого порядку за часом та необмеженого порядку за просторовими змінними.

On the basis of a generalized separation of variables method we propose an operator method of the solution construction of the Cauchy problem for a nonhomogeneous system of partial differential equations of the second order on time variable and infinite order on spatial variables.

У класі функцій $A_\beta = \{\varphi(x), x \in R^q : \varphi(z)$ — ціла в C^q функція, причому порядку, нижчого за $(\beta-1)^{-1}\beta$ за сукупністю змінних, якщо $1<\beta<\infty$; довільного скінченного порядку за сукупністю змінних, якщо $\beta=1$; довільного порядку за сукупністю змінних, якщо $0 \le \beta < 1$; експоненціального типу за кожною змінною, якщо $\beta=1\}$, де $\beta \in R^1_+ \bigcup \{+\infty\}$ на підставі узагальненого методу відокремлення змінних [1] в області змінних $t>0, x=(x_1,x_2,\ldots,x_q) \in R^q$ будемо вивчати таку задачу Коші: