УДК 621.372

В.М. Заяць
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра програмного забезпечення

УМОВИ ВИНИКНЕННЯ ДВОКРАТНИХ ЦИКЛІВ ДИСКРЕТНОЇ НЕАВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ

Встановлені умови виникнення циклів кратності два неавтономної дискретної системи, які підтверджені результатами комп‘ютерного моделювання.

The conditions arize of sicles divisible two for descrete system are determined. These resultes were proved by computer modeling.

У роботі [1] запропоновано модель автономної дискретної системи другого порядку, в якій можливе існування як гармонічних, так і квазігармонічних коливань довільної кратності. Умови виникнення та існування гармонічних коливань неавтономної дискретної моделі

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = ae^{-r_n} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \sin\nu\cdot n \\ \cos\nu\cdot n \end{pmatrix} \tag{1}$$

досліджені в роботі [2].

У цій роботі встановимо умови виникнення двократних квазіперіодичних режимів моделі (1).

Розв‘язок (1) шукатимемо у вигляді

$$\begin{aligned} x_n &= r_n \sin(\nu\cdot n+\alpha) \\ y_n &= r_n \cos(\nu\cdot n+\alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

Після підстановки (2) в (1) та прирівнявши коефіцієнти при sinνn та cosνn як з першого, так і з другого рівняння системи (1), отримуємо

$$\begin{aligned} r_{n+1}\cdot\cos(\nu+\alpha) - ae^{-r_n}\cdot\cos(\varphi+\alpha) &= A \\ r_{n+1}\cdot\sin(\nu+\alpha) - ae^{-r_n}\cdot\sin(\varphi+\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Піднісши кожне із рівнянь до квадрата та підсумувавши їх, маємо

$$r_{n+1}^2 - 2r_n\cdot r_{n+1}ae^{-r_n}\cdot\cos\varepsilon + a^2e^{-2r_n}\cdot r_n^2 = A^2, \tag{3}$$

де $\varepsilon = \varphi - \nu$.

Оскільки нас цікавлять цикли кратності 2, тобто режими з різними значеннями амплітуди коливань у двох сусідніх точках дискретизації, то $r_{n+2} = r_n$ і розв‘язки рівнянь

$$\begin{aligned} y^2 - 2axy\cdot e^{-x}\cdot\cos\varepsilon + a^2e^{-2x}\cdot x^2 - A^2 &= 0 \\ x^2 - 2axy\cdot e^{-y}\cdot\cos\varepsilon + a^2e^{-2y}\cdot y^2 - A^2 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

визначають можливі двократні режими. Для спрощення запису в (4) замінені змінні $x = r_n$ і $y = r_{n+1}$. Перше із рівнянь (4) є квадратним відносно змінної y, а друге – відносно змінної x. Отже,

$$y = axe^{-x} \cdot cos\,\varepsilon \pm \sqrt{A^2 - a^2 x^2 e^{-2x} sin^2\,\varepsilon} \tag{5,а}$$

$$x = aye^{-y} \cdot cos\,\varepsilon \pm \sqrt{A^2 - a^2 y^2 e^{-2y} sin^2\,\varepsilon} \tag{5,б}$$

В силу симетрії рівняння (5,а) і (5,б) відносно прямої y=x двократні цикли визначаються розв‘язками таких комбінацій рівнянь: ($5а^+$) і ($5б^+$); ($5а^-$) і ($5б^-$); ($5а^+$) і ($5б^-$). Комбінація ($5а^-$) і ($5б^+$) має розв‘язки, які зсунуті на фазу π по відношенню до розв‘язків рівнянь ($5а^+$) і ($5б^-$). Зауважимо, що знак "+" означає, що в рівняннях (5) перед коренем береться додатний знак, а в"-" – від‘ємний.

Дослідимо детальніше рівняння (5а). Незалежно від знака перед коренем $\frac{dy}{dx} = 0$, якщо

$$x = 0 \quad \text{або} \quad xe^{-x} = \frac{y \cdot cos\,\varepsilon}{a}.$$

Першому значенню x відповідає максимум y, який залежить від того, який взято знак перед коренем в рівнянні (5,а)

$$y^+_{max} = \frac{a\,cos\,\varepsilon + \sqrt{A^2 e^2 - a^2 sin^2\,\varepsilon}}{e} \tag{6,а}$$

$$y^-_{max} = \frac{a\,cos\,\varepsilon - \sqrt{A^2 e^2 - a^2 sin^2\,\varepsilon}}{e} \tag{6,б}$$

Другому значенню x відповідає мінімальне значення y, яке недосяжне в дійсній площині, оскільки раніше при $y_{кр} = -\frac{A\,cos\,\varepsilon}{sin\,\varepsilon}$ корені (5) стають комплексними. Завдяки тому, що $y_{кр}$ досягається при від‘ємному значенні x, то як тільки y^-_{max} стає додатним, комбінація ($5а^+$) і ($5б^-$) при A>1 забезпечує появу 2 двократних точок у другій чверті площини XY. В силу (6б) це існує при

a>Ae

Якщо ж ($5б^-$) при y=A має додатний знак, то незалежно від A ця ж комбінація ($5а^+$) і ($5б^-$) породжує дві двократні точки, одна з яких в першій, а друга – в другій четверті площини XY. На основі (5б) це має місце при

$a>e^A$

Комп'ютерне моделювання підтвердило існування вказаних режимів при різних параметрах a, A, ε.

Відзначимо, що знайдені двократні цикли існують до значень

$$a < \frac{A \cdot \varepsilon}{sin\,\varepsilon} \tag{7}$$

оскільки при невиконанні останньої нерівності корені (5) стають комплексними.

Комбінація рівнянь ($5а^-$) і ($5б^-$) забезпечують появу нерухомої точки, якщо кут нахилу дотичної до точки $y=x_2$, де x_2 - один із розв‘язків рівняння

$$A^2 = x^2 (1 - 2a \cdot e^{-x} cos\,\varepsilon + a^2 e^{-2x}) \tag{8}$$

визначений для рівняння ($5а^-$) перевищує цей кут визначений для рівняння ($5б^-$) в цій же точці x_2 . Відзначимо, що рівняння (8) має три розв‘язки

$$x_1 < 1; \qquad 1 < x < ln\,a; \qquad x_3 > ln\,a, \tag{9}$$

які існують завжди при ε=0. При ε≠0 завжди існує лише x_1 , а для існування x_2 і x_3 вимагається задання мінімальної амплітуди зовнішнього збурення A.

Значить, біфуркаційне значення параметра a, за якого появляється нова нерухома точка, визначається з нерівності

$$\left[(1-x_2)(\cos\varepsilon - ae^{-x_2})de^{-x_2}\right]^2 > (1-ae^{-x_2}\cos\varepsilon)^2 \qquad (10)$$

У випадку ε=0 приходимо до умови

$$a > a_{\kappa р} = \frac{e^{x_2}}{|1-x_2|} \qquad (11)$$

Для довільних $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ за виконання умови

$$a < e^x \cos\varepsilon$$

на основі (10) одержимо умову появи двократного режиму

$$a > a_{\kappa\, p} = \frac{e^{x_2}}{2(x_2-1)}\left[x_2\cos\varepsilon - \sqrt{4-4x_2+x_2^2\cos\varepsilon}\right] \qquad (12)$$

або з врахуванням того, що x_2 – розв‘язок (8)

$$a_{\kappa\, p} = \frac{x_2^2(x_2-2)-A^2(x_2-1)}{x_2^2(x-2)\cdot\cos\varepsilon}e^{x_2}\,.$$

Зауважимо, що формула (12) не має змісту, якщо

$$\frac{2(1-\sin\varepsilon)}{\cos^2\varepsilon} < x_2 < \frac{2(1+\sin\varepsilon)}{\cos^2\varepsilon}$$

У випадку

$$e^x\cdot\cos\varepsilon < a < \frac{e^x}{\cos\varepsilon}$$

Умова (10) існує при

$$a > a_{\kappa\, p} = \frac{e^{x_2}}{2(x_2-1)}\left[(x_2-2)\cos\varepsilon + \sqrt{4x_2-4+(x_2-2)^2\cos\varepsilon}\right] \qquad (13)$$

або з врахуванням (8)

$$a_{\kappa\, p} = \frac{x_2^2 - A^2(x_2-1)}{x_2^3\cos\varepsilon}e^{x_2}$$

При

$$a > \frac{e^x}{\cos\varepsilon} \qquad (14)$$

приходимо до умови появи двократного циклу

$$a > a_{\kappa\, p} = \frac{e^{x_2}}{2(x_2-1)}\left[x_2\cos\varepsilon + \sqrt{4-4x_2+x_2^2\cos^2\varepsilon}\right] \qquad (15)$$

та їй еквівалентної

$$a_{\kappa\, p} = \frac{x_2^3 - A^2(x_2-1)}{x_2^2(x_2-2)\cdot\cos\varepsilon}\cdot e^{x_2}$$

У табл.1 наведені біфуркаційні значення параметра $a_{кр}$ і відповідні їм значення x_2 для різних амплітуд зовнішнього збурення при ε=0.01:

Таблиця 1

Біфуркаційні значення параметра $a_{кр}$ і відповідні їм значення x_2 для різних амплітуд зовнішнього збурення при ε=0.01

A	5	2	1	0,5	0,4	0,3
$a_{кр}$	17,5	9,9	8,05	7,35	7,4	7,5
x_2	1,19	1,42	1,62	1,76	1,83	1,9

Умова появи двократного циклу для комбінації рівнянь ($5а^+$) і ($5б^-$) також визначається з нерівності (10). Але в цьому випадку в ролі x виступає максимальний розв‘язок рівняння (8). Отже, умова появи нерухомої точки для цієї комбінації при заданні різних параметрів a, A, ε визначається на основі нерівностей (12), (13), (15), в які замість x_2 необхідно підставити x_3 .

У табл.2 наведені біфуркаційні значення параметра $a_{кр}$ і відповідні значення x_3 для різних зовнішніх збурень та величини ε=0.01:

Таблиця 2

Біфуркаційні значення параметра $a_{кр}$ і відповідні значення x_3 для різних зовнішніх збурень та величини ε=0.01

A	5	2	1	0,7	0,5	0,4	0,3
$a_{кр}$	95,1	12,8	8,7	8,2	8,04	8,07	8,33
x_3	6,195	3,42	2,63	2,43	2,304	2,253	2,2207

Відзначимо, що для пар комбінацій ($5а^-$) і ($5б^-$) та ($5а^+$) і ($5б^+$) існує мінімальне значення A, за якого можлива поява нерухомої точки, яке в силу умов (7) та (14) визначається як

$$A > A_{min} = e \cdot tg\varepsilon \, .$$

Для комбінації ($5а^+$) і ($5б^+$) при деякому максимальному A двократний режим зникає.

Дотикання кривих ($5а^+$) і ($5б^-$), що має місце, якщо існує розв‘язок рівняння

$$\frac{(1-x)ae^{-x}(y\cos\varepsilon - axe^{-x})}{(y - axe^{-x}\cos\varepsilon)} = \frac{(x - aye^{-y}\cos\varepsilon)}{(1-y)ae^{-y}(x\cos\varepsilon - ay\cdot e^{-y})}$$

при подальшому зростанні параметра a забезпечує появу ще двох нерухомих точок.

Отже, в моделі (1) може виникнути 6 двократних нерухомих циклів, один з яких знаходиться в другій четверті і не має фізичного змісту, а інші 5 – в першій четверті. Так, для значень параметрів A=1, a=25, ε=0,01 за результатами комп‘ютерного моделювання встановлено появу таких двократних циклів:

- чотири цикли, породжені комбінацією ($5а^+$) і ($5б^-$):

x_1=-0.037; y_1=0.04;
x_2=0.175; y_2=4.58;
x_3=4.85; y_3=2.5;
x_4=8.75; y_4=1.034.

- один цикл, породжений комбінацією ($5а^-$) і ($5б^-$):

x_5=0.2838 y_5=4.469;

• один цикл, породжений комбінацією (5а$^+$) і (5б$^+$):

x_6=1.017 y_6=9.346.

Для кожного з вказаних циклів існує симетричний цикл, зсунутий по фазі на π радіан.

При значенні a, коли умова (7) не виконується, а корені (3) стають комплексними, появляється зона

$$1 > x_{кр1} < x < x_{кр2} > 1 \ ,$$

де $x_{кр1}$ і $x_{кр2}$ – розв‘язки рівняння

$$xe^{-x} = \frac{A}{a \sin \varepsilon} \ ,$$

в якій функції (5а) є невизначені в дійсній площині. Із зростанням a зона невизначеності зростає і всі нерухомі точки поступово зникають, окрім x_1, y_1.

Встановлення умов стійкості виявлених двократних циклів є предметом окремих досліджень.

1. Заяць В.М. Побудова комп‘ютерної моделі дискретної коливальної системи другого порядку. // Досвід розробки і застосування САПР в мікроелектроніці. Львів, 1999. С.87-88.
2. Заяць В.М., Синицький Л.А. Синхронізація генераторів, що працюють у дискретному часі. // Вісник ДУ "Львівська політехніка". 1999, № 366. С. 67-69.

УДК 539.3

В.М. Вігак, Я.С. Пушак
Українська академія друкарства

ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ СУЦІЛЬНОСТІ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ НЕОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ В КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ

На основі запропонованого методу інтегрування диференціальних рівнянь суцільності Коші для двовимірних неосесиметричних задач механіки деформованого твердого тіла в кругових областях одержані вихідні інтегро-диференціальні рівняння суцільності, які при необхідних умовах узгодження переміщень з деформаціями зведені до відомого в механіці диференціального рівняння суцільності. Коректно з врахуванням умов узгодження виведено формули для визначення перміщень через деформації, знайдено інтегральні умови суцільності для деформацій і переміщень.

Initial integral differential entirety equation, which under necessary circumstancer of transference coordination with deformations are reduced to well-known in mechanics differential entirety equation, have been obtained on the basis of proposed method of interration of Koshi entireti differential equation for two-dimension nonaxlesymetrial mechanics tasks of deformable solid in the circual fields/ Formulas for the determination of transferences through deformations have been