УДК 517.968

В.З.Станкевич, Б.М.Стасюк
Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра опору матеріалів

ПРО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОЛІГАРМОНІЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

У статті описано підхід для отримання аналітичного розв’язку деяких двовимірних інтегральних та інтегро- диференційних рівнянь першого роду типу ньютонового потенціалу. Підхід базується на використанні полігармонічних многочленів.

In a paper the approach to deriving an analytical solution of some two-dimensional integrated and integro-differential equations of the first sort of newtonian potential-type is proposed. The approach is based on use of polyharmonic polynomials.

Значна кількість прикладних задач, зокрема в теорії пружності, зводиться до роз-в’язання двовимірних інтегральних рівнянь першого роду вигляду

$$\iint_S \frac{\mu_1(\xi)}{|x-\xi|} dS_\xi = p_1(x) \ , \ x \in S \ , \tag{1}$$

та інтегродиференційних рівнянь першого роду вигляду

$$\Delta_x \iint_S \frac{\mu_2(\xi)}{|x-\xi|} dS_\xi = p_2(x) \ , \ x \in S \ , \tag{2}$$

де $\Delta_x = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ – двовимірний оператор Лапласа. Зокрема, такі рівняння відповідають тривимірним задачам теорії пружності про напружено-деформований стан безмежного тіла, яке містить тонке абсолютно жорстке включення (рівняння (1)) або тріщину (рівняння (2)). У цьому випадку всі величини в рівняннях (1), (2) мають простий фізичний зміст: функції $p_i(x)\,, i = 1,2$ описують навантаження тіла; невідомі густини $\mu_1(x)$ і $\mu_2(x)$ характеризують відповідно стрибки напружень (переміщень) протилежних поверхонь включення (тріщини); S – плоска область в тривимірному просторі, яку займає включення (тріщина).

Рівняння (1), (2) в літературі добре відомі, досліджені класи функцій, в яких існують їх розв’язки, запропоновані методи їх розв’язання [1-3]. Водночас, отримання аналітичних розв’язків цих рівнянь пов’язано із значними труднощами, продиктованими накладанням суттєвих обмежень як на праві частини рівнянь, так і на область інтегрування S. У пропонованій роботі розглядається випадок, коли S – кругова область радіуса a

$$S = \left\{ x(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \le a^2 \right\} \ , \ 0 < a < \infty \ .$$

У відповідних рівнянням (1), (2) прикладних задачах поведінка правих частин рівнянь (1), (2) зумовлена певними фізичними умовами в області S, наприклад, обмеженістю переміщень і напружень, тобто

$$\left|p_i(x)\right| < \infty \ , \ x \in S \ , \ i = 1,2 \ . \tag{3}$$

Розглянемо випадок, коли функції $p_i(x)$, $i = 1,2$ є полігармонічними многочленами. З цією метою розглянемо полігармонічні многочлени m-го порядку

$$\begin{Bmatrix} u_n^{(m)}(x) \\ v_n^{(m)}(x) \end{Bmatrix} = r^{n+m-1} \begin{Bmatrix} cos(n-m+1)\varphi \\ sin(n-m+1)\varphi \end{Bmatrix} \ , \ n = 0,1,... \ , \ m = 1,2,... \ , \tag{4}$$

де $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, $\varphi = arctg\, {}^{x_2}\!/_{x_1}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Вибір значень n зумовлений умовами (3). Ці многочлени задовольняють в області S полігармонічно рівняння m-го порядку

$$\Delta_x^{(m)} \begin{Bmatrix} u_n^{(m)}(x) \\ v_n^{(m)}(x) \end{Bmatrix} = \underbrace{\Delta_x ... \Delta_x}_{m\ раз} \begin{Bmatrix} u_n^{(m)}(x) \\ v_n^{(m)}(x) \end{Bmatrix} = 0 .$$

Для розглядуваних многочленів існують такі інтегральні спектральні співвідношення:

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}\,|x-\xi|} \begin{Bmatrix} u_n^{(m)}(\xi) \\ v_n^{(m)}(\xi) \end{Bmatrix} dS_\xi = -\pi^2 \frac{1}{(2m-2)!\,!} \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{\nu+m} \frac{(2n+2\nu-2m+1)!\,!}{(2n+2\nu-2m+2)!\,!} \times$$

$$\times \frac{(2\nu-1)!\,!}{(2\nu-2m+1)!\,!} \binom{m-1}{\nu} a^{2(m-\nu-1)} \begin{Bmatrix} u_{\nu+n-m+1}^{(\nu+1)}(x) \\ v_{\nu+n-m+1}^{(\nu+1)}(x) \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

$$\Delta_x \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x-\xi|} \begin{Bmatrix} u_n^{(m)}(\xi) \\ v_n^{(m)}(\xi) \end{Bmatrix} dS_\xi = \pi^2 \frac{1}{(2m-2)!\,!} \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{\nu+m} \frac{(2n+2\nu-2m+3)!\,!}{(2n+2\nu-2m+2)!\,!} \times$$

$$\times \frac{(2\nu+1)!\,!}{(2\nu-2m+3)!\,!} \binom{m-1}{\nu} a^{2(m-\nu-1)} \begin{Bmatrix} u_{\nu+n-m+1}^{(\nu+1)}(x) \\ v_{\nu+n-m+1}^{(\nu+1)}(x) \end{Bmatrix}. \tag{6}$$

Доведемо співвідношення (5)

$$\iint_S \frac{u_n^{(m)}(\xi)}{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}} \frac{dS_\xi}{|x-\xi|} = \iint_S \frac{u_n^{(m)}(\xi)}{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}} \int_0^\infty J_0\left(t|x-\xi|\right) dt\, dS_\xi = \int_0^a \frac{\rho^{n+m}}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \int_0^{2\pi} cos(n-m+1)\psi \times$$

$$\times \int_0^\infty J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\, cos(\psi-\varphi)}\right) dt\, d\psi\, d\rho = 2\pi\, cos(n-m+1)\varphi \int_0^a \frac{\rho^{n+m}}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \int_0^\infty J_{n-m+1}(tr) \times$$

$$\times J_{n-m+1}(t\rho)\, dt\, d\rho = \pi\sqrt{\pi}(n-m+1)_{m-1} cos(n-m+1)\varphi \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu}{(n-m+1)_\nu} \binom{m-1}{\nu} a^{\nu+n+1/2}\, 2^{m-\nu-1/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty t^{\nu-m+1/2} J_{n-m+1}(tr) J_{n+\nu+1/2}(at)\, dt = \pi\sqrt{\pi}(n-m+1)_{m-1} cos(n-m+1)\varphi \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu}{(n-m+1)_\nu} \times$$

$$\times \binom{m-1}{\nu} a^{2(m-1)} r^{n-m+1}\, \Gamma\begin{pmatrix} \nu+n-m+3/2 \\ m, n-m+2 \end{pmatrix} {}_2F_1\left(\nu+n-m+3/2, \nu-m; n-m+2; \frac{r^2}{a^2}\right) . \tag{7}$$

Тут $J_m(x)$ – функція Бесселя першого роду m-го порядку; ${}_2F_1(a,b;c;x)$ - гіпергеометрична функція Гаусса; $\Gamma\begin{pmatrix} a \\ b,c \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)\Gamma(c)}$, де $\Gamma(x)$ – гамма-функція Ейлера; $(n)_m$ та

$\binom{n}{m}$ – відповідно символ Похгаммера та біноміальні коефіцієнти, їх вигляд наведено в [4]. Розвиваючи далі гіпергеометричну функцію в ряд та провівши низку спрощень, вираз (7) набуває вигляду (5). У перетвореннях (7) використано значення інтегралів [4]

формула Ліпшиця: $$\int_0^\infty J_0(t|\omega|)dt = |\omega|^{-1} \ ;$$

формула множення: $$\int_0^{2\pi} e^{-im\theta} J_0\left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\theta}\right) d\theta = 2\pi J_{-m}(r_1) J_m(r_2) \ ;$$

$$\int_0^a x^{\nu+2n+1}\left(a^2 - x^2\right)^{\beta-1} J_\nu(cx)dx = \frac{1}{2}(\nu+1)_n \Gamma(\beta) a^{2n+2\beta+\nu}\left(\frac{2}{ac}\right)^{n+\beta} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(\nu+1)_k}\binom{n}{k}\left(\frac{ac}{2}\right)^k J_{k+n+\beta+\nu}(ac) \ , \quad \left[a, Re\,\beta > 0; Re\,\nu > -n-1\right] ;$$

формула Вебера-Шафхейтліна: $$\int_0^\infty x^{\alpha-1} J_\mu(bx) J_\nu(cx)dx =$$

$$= 2^{\alpha-1} b^\mu c^{-\mu-\alpha}\, \Gamma\left(\begin{matrix}(\alpha+\mu+\nu)/2 \\ (\nu-\mu-\alpha)/2+1, \mu+1\end{matrix}\right) {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\mu+\nu}{2}, \frac{\alpha+\mu-\nu}{2}; \mu+1; \frac{b^2}{c^2}\right)$$

$$(0 < b < c) \ , \ \left[b, c, Re(\alpha+\mu+\nu) > 0; Re\,\alpha < 2\right] .$$

Аналогічно виведено інтегральні спектральні співвідношення (6). Зазначимо, що деякі інші властивості полігармонічних многочленів наведено в [5].

Отримані співвідношення (5), (6) дозволяють отримати аналітичні розв’язки рівнянь (1), (2) для випадку, коли їх праві частини представлені рядом за полігармонічними многочленами, тобто

$$p_i(x) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=1}^{M} \left[A_n^{i1(m)} u_n^{(m)}(x) + A_n^{i2(m)} v_n^{(m)}(x)\right] \ , \ i = 1,2 \ , \ N = 0,1,\ldots \ , \ M = 1,2,\ldots , \qquad (8)$$

де $A_n^{i1(m)}, A_n^{i2(m)}$ – відомі постійні коефіцієнти. Надалі індекс $\mathrm{i} = 1$ відповідатиме інтегральному рівнянню (1), індекс $\mathrm{i} = 2$ – інтегродиференційному рівнянню (2).

Відомо, що єдиний розв’язок інтегрального рівняння (1) існує в класі функцій, що обертаються на контурі області S на безмежність порядку $\left(a^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{-1/2}$, $x_1^2 + x_2^2 \to a^2$ [1]. Водночас єдиний розв’язок інтегро- диференційного рівняння (2) існує в класі функцій, що обертаються на контурі області S в нуль порядку $\left(a^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}$, $x_1^2 + x_2^2 \to a^2$ [1]. Враховуючи це та спектральні співвідношення (5), (6), невідомі густини $\mu_i(x), i = 1,2$ рівнянь (1), (2) подамо у вигляді

$$\mu_i(x) = \left(a^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2-\delta_{i1}} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=1}^{M} \left[C_n^{i1(m)} u_n^{(m)}(x) + C_n^{i2(m)} v_n^{(m)}(x)\right] \ , \ i = 1,2 \ , \qquad (9)$$

де $C_n^{i1(m)}, C_n^{i2(m)}$ – невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню, δ – Кронекерів символ. Підставивши вирази (9) у рівняння (1), (2) та скориставшись спектральними співвідношеннями (5), (6), отримаємо

$$(\delta_{i2}-\delta_{i1})\pi^2 \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{(2m-2)!!} \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{\nu+m} \frac{(2n+2\nu-2m+1+2\delta_{i2})!!}{(2n+2\nu-2m+2)!!} \frac{(2\nu-1+2\delta_{i2})!!}{(2\nu-2m+1+2\delta_{i2})!!} \times$$

$$\times \binom{m-1}{\nu} a^{2(m-\nu-1)} \left[C_n^{i1(m)} u_{\nu+n-m+1}^{(\nu+1)}(x) + C_n^{i2(m)} v_{\nu+n-m+1}^{(\nu+1)}(x)\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{M} \left[A_n^{i1(m)} u_n^{(m)}(x) + A_n^{i2(m)} v_n^{(m)}(x)\right], \quad i=1,2 \; . \tag{10}$$

Прирівнявши в лівій та правій частинах (10) вирази при однакових полігармонічних многочленах, отримаємо систему $2\times\mathrm{N}\times\mathrm{M}$ алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_n^{i1(m)}, C_n^{i2(m)}$

$$(\delta_{i1}-\delta_{i2})\pi^2 \sum_{\substack{k,q \\ k-q=n-m}} \frac{(-1)^{q+m}}{(2q-2)!!} \frac{(2k+2m-2q-1+2\delta_{i2})!!}{(2k+2m-2q)!!} \frac{(2m-3+2\delta_{i2})!!}{(2m-2q-1+2\delta_{i2})!!} \times$$

$$\times \binom{q-1}{m-1} a^{2(q-m)} C_k^{ij(q)} = A_n^{ij(m)} \;, \quad i,j=1,2 \;, \quad n,k=\overline{0,N} \;, \; m,q=\overline{1,M}$$

Отже, задача про знаходження аналітичних розв'язків двовимірного інтегрального (1) та інтегродиференційного рівнянь (2) при обумовлених вище правих частинах та області інтегрування S зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно коефіцієнтів розкладу розв'язків вихідних рівнянь в ряди за полігармонічними многочленами.

1. Хай М.В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. К., 1954. 2. Леонов М.Я. Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала // Укр. мат. журнал. 1953. 5, № 1. С.50-57. 3. Линьков А.М., Могилевская С.Г. Конечночастные интегралы в задачах о пространственных трещинах // Прикл. математика и механика. 1986. 50, Вып. 5. С.844-850. 4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и их произведений. М., 1954. 5. Станкевич В.З., Стасюк Б.М. Властивості та застосування полігармонічних та гельмгольцевих многочленів для замкнутої області. Вісник ДУ "Львівська політехніка". 1998. № 337. С.155-157.