УДК 681.513: 519.713

І. Р. Савчак
Українська академія друкарства

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІВ У ЯРУСНО-ПАРАЛЕЛЬНУ ФОРМУ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЦЬ ІНЦИДЕНЦІЙ

© І. Р. Савчак, 2000

Розглянуто метод топологічного аналізу схем, а саме перетворення графів в ярусно-паралельну форму за допомогою матриць інциденцій. Запропоновано доведення теорем, за якими відбувається перетворення графу в ярусно-паралельну форму, в основі яких покладено операції тризначної логіки. На підставі запропонованої методики розроблено алгоритм перетворення, робота якого проілюстрована на конкретному прикладі. Цей процес сприяє визначенню послідовності моделювання роботи компонентів схеми.

A method of topological analysis of plans, namely the conversions of earls into the tier-parallel form by means of incedences matrices is considered. Theorem demonstration, based on the thrice logic operations, for column conversion into the tier-parallel form is proposed. The algorithm of conversion, based on the offered method, is developed and illustrated on concrete instance. Given process facilitates the definition of components procedure simulation work sequence .

Складність автоматизації розрахунків динамічних систем, частково систем управління, зумовлена великою відмінністю класів моделей- лінійних і нелінійних, неперервних і дискретних, стаціонарних і нестаціонарних, детермінованих і стохастичних, а також задач аналізу та синтезу побудови моделей. Застосування обчислювальної техніки дає змогу по-новому розробляти теоретичні методи аналізу та синтезу побудови моделей систем керування.

Для прийняття оптимальних рішень під час побудови апаратури системи керування, а також для повного виявлення всіх форм паралелізму в системі, роботу системи керування доцільно перетворювати в ярусно-паралельну форму [1]. Графічне зображення схеми є деякою моделлю зв'язків між компонентами, яка своєю чергою є певним видом орієнтованого графу [2]. Для графу в ярусно-паралельній формі всі вершини розділені на яруси, причому так, що між вершинами в межах одного ярусу не може бути ніяких зв'язків. Для зберігання і обробки в комп'ютері граф записується в матричній формі [3]. Існує декілька видів матричних форм. Для математичного моделювання з’єднань компонентів орієнтованих графів найкраще застосовувати матриці суміжності та інциденції. У матрицях суміжності записується наявність або відсутність (відповідно 1 або 0) зв’язку між компонентами схеми. Матриці інциденцій щодо матриць суміжностей містять інформацію про напрям (вхід, вихід) з’єднань. Їх раніше не застосовували через невеликі обсяги пам’яті комп’ютера, що на сьогодні вже не є перепоною. Тому в цій роботі застосовують матриці інциденцій [3]. У таких матрицях кожній компоненті схеми, що має свій позиційний номер, відповідає вершина орієнтованого графу з відповідним номером, а кожному напрямленому з'єднанню в

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

схемі відповідає дуга графу. Причому, номер дуги (верхній індекс) відповідає номерові вершини, в яку ця дуга заходить. Якщо в одну вершину заходить декілька дуг, то відповідно міняється нижній індекс при позначенні дуги (рис.1).

Для того, щоб виділити верхній і нижній індекси при позначенні дуги графу, тобто показати кількість дуг, що заходять в одну вершину, створюється тривимірний масив (матриця). У цьому випадку буде три змінні величини: *i*- рядок (вершина графу), *j*- стовпець (дуга з номером, що відповідає вершині, в яку вона заходить) і *k*- глибина (кількість таких дуг). Для збереження закономірності в матриці по *k*- змінній порожні стовпці заповнюються нулями. Така просторова матриця зображена на рис.1.

Для поділу схеми на яруси застосовують операції алгебри логіки над матрицями інциденцій. У них всі елементи приймають значення з множини $\in = \{-1,0,1\}$.

Введемо ¤-операцію над матрицями $A=[a_{ijk}]$ i $B=[b_{ijk}]$, елементи яких a_{ijk} і b_{ijk} $\in\{-1,0,1\}$.

Означення 1. ¤-операція над тривимірними матрицями $A=[a_{ijk}]_{n*m*p}$, $a_{ijk} \in \{-1,0,1\}$ і $B=[b_{ijk}]_{m*n*p}$, $b_{ijk} \in \{-1,0,1\}$ дає в результаті матрицю $F=A¤B$, кожен елемент якої f_i буде

$$f_i=(a_{1i1}@b_{i11})\&(a_{1i2}@b_{i12})\& \ldots\&(a_{1ip}@b_{i1p})\&(a_{2i1}@b_{i21})\& (a_{2i2}@ b_{i22})\&\ldots$$

$$\&(a_{2ip}@ b_{i2p})\&\ldots\&(a_{nip}@ b_{inp}) = \bigwedge_{g=1,\, s=1}^{n,p} (a_{gis}@b_{igs}) \qquad (1)$$

Тобто, внаслідок ¤-операції над тривимірними матрицями A і B кожен елемент стовпця матриці A з глибиною k додається по mod3 [4] з кожним елементом рядка матриці B з глибиною k, а між доданками відбувається кон'юнкція. У результаті отримаємо елемент f_i матриці $F=[f_i]_{m.}$

Крім ¤-операції застосовуємо операцію логічного додавання по mod3.

Означення 2. Якщо існує матриця $A=[a_i]_n$,$a_i \in \{0,1\}$ і матриця $B=[b_{ik}]_{n*p}$, $b_{ik} \in\{-1,0,1\}$, то внаслідок логічного додавання по mod3 утвориться матриця $F=A@B$, в якій кожний елемент записується так:

$$f_{ik}=a_i@b_{ik} \qquad (2)$$

Відповідно до означень 1 і 2 наведемо теореми, за якими відбувається перетворення графу в ярусно-паралельну форму.

Теорема 1. Якщо існує матриця з'єднань компонентів $A=[a_{ijk}]_{n*n*p}$, $a_{ijk} \in\{-1,0,1\}$ і матриця $B=[b_{ik}]_{n*p}$, $b_{ik} \in \{-1,0,1\}$, з рядками, елементи яких дорівнюють «1», що відповідають вершинам графу N-го ярусу, то внаслідок ¤-операції над матрицями утвориться матриця $F=B$ ¤ A, одиничні елементи якої будуть відповідати тільки вершинам графу N-го і $N+1$-го ярусів.

Доведення. Як видно з формули (1) і відповідно до тризначної логіки, довільний елемент f_i матриці F прийме одиничне значення тоді і тільки тоді, коли під час логічного додавання по mod3 всі доданки $b_{ik}@a_{ijk}$ $(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,n;\ k=1,...,p)$ приймуть ненульові значення.

Нехай елементи $b_{i-3k}=1$ $(k=1,\ldots p)$, а всі інші елементи матриці B дорівнюють "-1", тобто вершина з номером j-3 належить до N-го ярусу, а всі решта вершин не належать до нього. Елемент f_i прийме одиничне значення тоді, коли всі елементи a_{ijk} матимуть значення "0" або "-1", крім елемента a_{ij-3k}, який може мати довільне значення. Це означає, що вер-

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

шина і графу не має вихідної дуги до інших вершин, крім вершини з номером *j-3k*, якщо елемент $a_{ij-3k}=1$. Отже, в матриці *F* її одиничні елементи відповідають тільки вершинам графу *N*-го і *N+1*-го ярусів. Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо існує матриця $F=[f_i]_n$, одиничні елементи якої відповідають вершинам графу *N*-го і *N+1*-го ярусів, і якщо існує матриця $B=[b_{ik}]_{n*p}$, з рядками, елементи яких дорівнюють «1», що відповідають вершинам графу *N*-го ярусу, то внаслідок логічного додавання по mod3 цих матриць *S=F@B*, утвориться матриця з рядком (рядками), елементи якого дорівнюють «0», що відповідає компоненту схеми *N+1*-го ярусу.

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1.

Перетворення графів у ярусно-паралельну форму передбачає циклічне виконання *N* кроків *(N=1,2,....)*. Спочатку приймається, що всі елементи матриці S_0 дорівнюють "-1", тобто жодна вершина графу не входить в перший ярус. Далі виконується ¤-операція над матрицями $B_N=S_{N-1}$¤A для того, щоб знайти ті вершини графу, які входять у *N* та *N-1*-й ярус. Тоді здійснюється операція $G_N=B_N@S_0$, за допомогою якої визначаються вершини графу, які входять в *N*-й ярус. Ці операції виконуються доти, поки матриця B_N не стане одиничною.

Проілюструємо роботу цього процесу для графу, зображеного на рис.2.

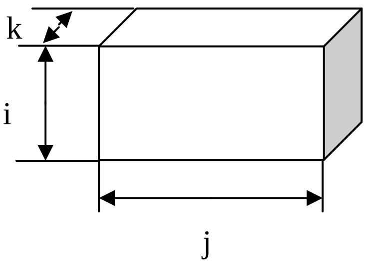

Рис. 1. Вигляд матриці у просторі

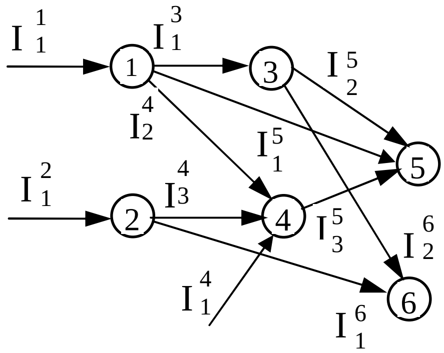

Рис. 2. Початковий граф

Матриця А на площині виглядатиме так:

A=

X \ I	$^{1}_{1}$	$^{1}_{2}$	$^{1}_{3}$	$^{2}_{1}$	$^{2}_{2}$	$^{2}_{3}$	$^{3}_{1}$	$^{3}_{2}$	$^{3}_{3}$	$^{4}_{1}$	$^{4}_{2}$	$^{4}_{3}$	$^{5}_{1}$	$^{5}_{2}$	$^{5}_{3}$	$^{6}_{1}$	$^{6}_{2}$	$^{6}_{3}$
1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Верхній індекс при позначенні *I* означає *j*-рядок, а нижній індекс – *k*-глибину.

Надалі матриці будуть мати такий вигляд:

S_0=

	I_1	I_2	I_3
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1
3	-1	-1	-1
4	-1	-1	-1
5	-1	-1	-1
6	-1	-1	-1

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Покладемо N=1

$$B_1=S_0¤A=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}¤\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$S_1=\overline{B_1@S_0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\overline{@}\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad G_1=B_1@S_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

У перший ярус входить п'ята і шоста вершини графу. Операція над матрицями продовжується далі, оскільки $B_1 \neq 1$.

N=2

$$B_2=S_1¤A=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}¤\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$S_2=\overline{B_2@S_0}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\overline{@}\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad G_2=B_2@S_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

У другий ярус входить третя і четверта вершина графу $B_2 \neq 1$.

N=3

$$B_3=S_2¤A=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}¤\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$S_3=\overline{B_3@S_0}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\overline{@}\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad G_3=B_3@S_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

У третій ярус входить перша і друга вершини графа. $B_3=1$, отже, перетворення графу в ярусно-паралельну форму закінчилося.

Отриманий граф в ярусно-паралельній формі зображений на рис. 3.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

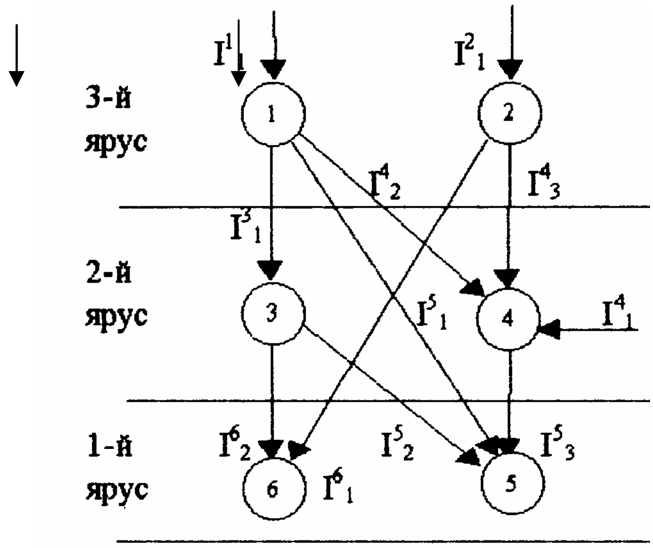

Рис. 3. Граф в ярусно-паралельній формі

Аналізуючи роботу цього процесу можемо зробити висновок, що перетворення графів у ярусно-паралельну форму на основі матриць інциденцій сприяє визначенню послідовності моделювання роботи компонентів схеми.

1. Мельник А.А. Процессоры обработки сигналов / Препринт 29-89. Ин-т прикл. проблем механики и математики. Львов, 1989. 2. Оре О. Графы и их применение. М., 1983. 3. Берж К. Теория графов и ее применение. М., 1962. 4. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем. М., 1974. 5. Дунець Р.Б. Визначення послідовності моделювання аналогових елементів в системах автоматичного керування.// Інформаційні технології та розпізнавання образів. Т. 3, Ч. 2.- Львів- Харків- Тернопіль,1993. -С.111-116. 6. Дунець Р., Дунець Б. Алгоритм перетворення графів в ярусно- паралельну форму на основі операцій алгебри логіки.// Поліграфія і видавнича справа. 1997. №33. С.17-24.

УДК 519.685:519.63

О.І. Наумко, Я.Г. Савула
Національний університет ім. Ів. Франка

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УСТАЛЕНОЇ НАПІРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

© О.І. Наумко, Я.Г. Савула, 2000

Розв'язання ДРЧП для поля потенціалу фільтрації під гідротехнічними спорудами має велике значення в інженерній практиці. Коли область фільтрації містить тонкі включення (прошарки) інших матеріалів, постають труднощі числового аналізу. У статті для подолання цих труднощів пропонуються методи декомпозиції області. Наведені числові результати (таблиці і графіки) розв'язання модельної двовимірної задачі.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua