

УДК 621.396.6:681.3

В. Каркульовський, І. Мотика

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра САПР

МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ. СТАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

© Каркульовський В., Мотика І., 2002

Розглядаються особливості застосування методу діакоптики при моделюванні складних механічних систем на етапі статичного аналізу.

Specifics of diacoptics method usage for modeling of complex mechanics systems on static analysis stage are given.

Для розрахунку статичного режиму механічних конструкцій електронної апаратури (ЕА) в умовах просторового навантаження необхідна розробка загального підходу, який дозволив би аналізувати складні механічні системи замкнутого типу.

Пропонується розглядати конструкцію ЕА як складну систему із зосередженими параметрами. До системи можна застосувати методи діакоптики, тобто її можна розбити на окремі елементи, характеристики яких визначаються попередньо.

Для аналізу складна механічна система розчленовується плоскими перерізами на базові елементи і шарніри, які збігаються із компонентами, виділеними для геометричного аналізу [1]. Припускається, що в плоских перерізах виникають нормальні і дотичні напруження, які розподілені достатньо рівномірно і, розглядаючи рівновагу перерізу, можна привести до системи сил та моментів, зосереджених в центрі жорсткості перерізу:

$$\vec{Q} = Q_1 \vec{e}_1 + Q_2 \vec{e}_2 + Q_3 \vec{e}_3, \quad (1)$$

де \vec{Q} – вектор внутрішніх зусиль; Q_1 – осьова сила; Q_2, Q_3 – перерізуючі сили.

$$Q_1 = \int_F \sigma_z dF; \quad Q_2 = \int_F \sigma_x dF; \quad Q_3 = \int_F \sigma_y dF, \quad (2)$$

де σ_z – нормальне напруження в елементарній площадці dF ; σ_x, σ_y – дотичні напруження; F – площа перерізу, що розглядається.

$$\vec{M} = M_1 \vec{e}_1 + M_2 \vec{e}_2 + M_3 \vec{e}_3, \quad (3)$$

де \vec{M} – вектор внутрішніх моментів; M_1 – крутильний момент; M_2, M_3 – згинаючі моменти.

$$M_1 = \int_F \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \rho dF, \quad (4)$$

(ρ – радіус елементарної площадки відносно центра перерізу).

$$M_2 = \int_F \sigma_y dF; \quad M_3 = \int_F \sigma_x dF. \quad (5)$$

Будемо вважати, що при русі системи та деформаціях елементів розділюючі перерізи залишаються плоскими.

Отже, при взаємодії із системою в перерізах виникає узагальнений вектор реакцій:

$$\|\mathbf{R}\|^T = \|\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z, \mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z\|.$$

Крім того, для кожного перерізу можна задати вектор переміщень в декартовій системі координат:

$$\|\mathbf{S}\|^T = \|\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \phi, \Delta \theta\|.$$

Кожний базовий елемент описується системою рівнянь, які зв'язують узагальнені переміщення перерізів(входів) із узагальненими силами в цих перерізах у локальній системі координат, яка вибирається для конкретного типу елемента:

$$\begin{pmatrix} \|\mathbf{S}_1\| \\ \|\mathbf{S}_2\| \\ * \\ * \\ \|\mathbf{S}_m\| \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} \|\mathbf{R}_1\| \\ \|\mathbf{R}_2\| \\ * \\ * \\ \|\mathbf{R}_m\| \end{pmatrix}, \quad (6)$$

де \mathbf{R}_i – вектор реакцій в i -му перерізі; \mathbf{S}_i – вектор переміщень i -го перерізу; m – кількість з'єднувальних перерізів (входів) елемента.

До системи сил може також включатися сила, прикладена в точці вибраної системи координат (сила ваги або сила інерції). На складність структури елемента принципів обмежень не накладається.

Шарніри – це вільні, частково вільні або не вільні елементи, які описуються рівняннями (6) і які фактично можна подати у вигляді ідеального елемента із відомою кількістю ступенів вільності. Шарнір визначає спосіб з'єднання елементів у системі і описується двома системами рівнянь – рівняннями рівноваги узагальнених сил, прикладених до його перерізів (входів) (7) та рівняння зв'язку переміщень входів (8):

$$\Phi \begin{pmatrix} \|\mathbf{R}_1\| \\ \|\mathbf{R}_2\| \\ * \\ * \\ \|\mathbf{R}_m\| \end{pmatrix} + \mathbf{Q} = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{L} \begin{pmatrix} \|\mathbf{S}_1\| \\ \|\mathbf{S}_2\| \\ * \\ * \\ \|\mathbf{S}_m\| \end{pmatrix} + \mathbf{U} = 0, \quad (8)$$

де \mathbf{R}_i , \mathbf{S}_i – вектори реакцій та переміщень i -го перерізу, відповідно; \mathbf{Q} , \mathbf{U} – вектори зовнішніх зусиль і переміщень центра шарніра; m – кількість перерізів шарніра.

Зовнішні зусилля і кінематичні зміщення прикладаються тільки до шарнірів, точніше до деяких точок, що називаються центрами шарнірів.

Взявши до уваги розроблені моделі базових елементів та шарнірів, можна сформулювати повну систему рівнянь, що описують статичний режим складної механічної системи у вигляді:

$$\begin{cases} \mathbf{PAR} + \mathbf{Q} = 0 & (9) \\ \mathbf{GBS} + \mathbf{U} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Рівняння (9) відображають рівновагу силових факторів у перерізах. Аналогічним до нього є рівняння першого закону Кірхгофа методу контурних струмів.

У даних рівняннях:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{P}^* \\ \hline \mathbf{P}^{**} \\ \hline \end{array} \quad (11)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{Q}^* \\ \hline \mathbf{Q}^{**} \\ \hline \end{array} \quad (12)$$

\mathbf{P} – матриця перерізів; \mathbf{P}^* – матриця включення багатополюсників; \mathbf{P}^{**} – допоміжна матриця для побудови рівнянь рівноваги для кожного багатополюсника; \mathbf{Q} – вектор зовнішніх силових факторів (коли до перерізів не прикладаються зовнішні сили $\mathbf{Q}=0$); \mathbf{A} – матриця перетворень координат.

Рівняння (12) відображають умови нерозривності. Для електричних кіл аналогом цих рівнянь є рівняння другого закону Кірхгофа методу контурних струмів.

У рівняннях (12):

$$\mathbf{G} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{G}^* \\ \hline \mathbf{G}^{**} \\ \hline \end{array} \quad (13)$$

\mathbf{G} – матриця контурів мережі із багатополюсниками; \mathbf{G}^* – контурна матриця включень багатополюсника; \mathbf{G}^{**} – допоміжна матриця для побудови рівнянь, що описують багатополюсник в переміщеннях; \mathbf{B} – матриця перетворення координат.

$$\mathbf{U} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{U}^* \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad (14)$$

\mathbf{U} – вектор зовнішніх переміщень (коли до контурів не прикладені зовнішні переміщення $\mathbf{U}=0$).

Отже, в рівняння (9) входять рівняння рівноваги в перерізах та рівняння рівноваги окремих елементів.

У рівняння (10) входять рівняння нерозривності для цілої системи та рівняння, які описують моделі базових елементів та шарнірів.

Матриця перерізів \mathbf{P} , яка складається із матриць \mathbf{P}^* і \mathbf{P}^{**} , будується так.

Матриця включення багатополюсників (\mathbf{P}^*) має вигляд:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{P}_1^* & \mathbf{P}_2^* & \dots & \mathbf{P}_i^* & \dots & \mathbf{P}_k^* \\ \hline \end{array} \quad (15)$$

де i – номер багатополюсника (базового елемента чи шарніра); k – кількість багатополюсників в системі; P_i^* – підматриця для i -го багатополюсника.

Кожному перерізу системи в підматриці P_i^* відповідає b рядків, кількість стовпців дорівнює b_m , де m – кількість полюсів i -го багатополюсника. Одиниці ставляться на перетині рядків з $b_m - 5$ -ї до $b_m - i$ із $b_l - 5$ -м до $b_l - m$ стовпцями відповідно, якщо m -й переріз в системі відповідає 1-му полюсу даного багатополюсника.

Матриця P^{**} має вигляд:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} P_1^{**} & P_2^{**} & \dots & P_j^{**} & \dots & P_k^{**} \end{array} \right] \quad (16)$$

де j – номер багатополюсника в системі; P_j^{**} – підматриця для j -го багатополюсника, яка має розміри $b_k \times b_m$ (m – кількість полюсів j -го багатополюсника).

Для j -го багатополюсника у m позиціях рядків з $b_j - 5$ -ї до b_j підматриці P_j^{**} стоять одиниці так, що рядки $b_j - 5$ до $b_j + 1$ обмежують m одиночних підматриць $b \times b$, розміщених одна за однією.

Матриця контурів G , що складається із матриць G^* і G^{**} , будується так.

Контурна матриця включення багатополюсників G^* має вигляд:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} G_1^* & G_2^* & \dots & G_i^* & \dots & G_k^* \end{array} \right] \quad (17)$$

де i – номер багатополюсника; k – кількість багатополюсників в системі; G_i^* – підматриця для i -го багатополюсника.

Кожному незалежному контуру системи в підматриці G_i^* відповідає b рядків, кількість стовпців дорівнює b_m , де m – кількість полюсів даного багатополюсника.

Контурна підматриця включення i -го багатополюсника має таку структуру:

а) $+1$ стоїть на перетині рядків з $b_m - 5$ -ї до b_m із $b_l - 5$ -м до b_l -го стовпцями відповідно, якщо компоненти вектора переміщення 1-го полюса входять в m -й контур і напрямки обходу контура та вектора переміщень збігається;

б) -1 відповідає тим же умовам, але напрямком обходу контура не збігається із напрямком вектора переміщень;

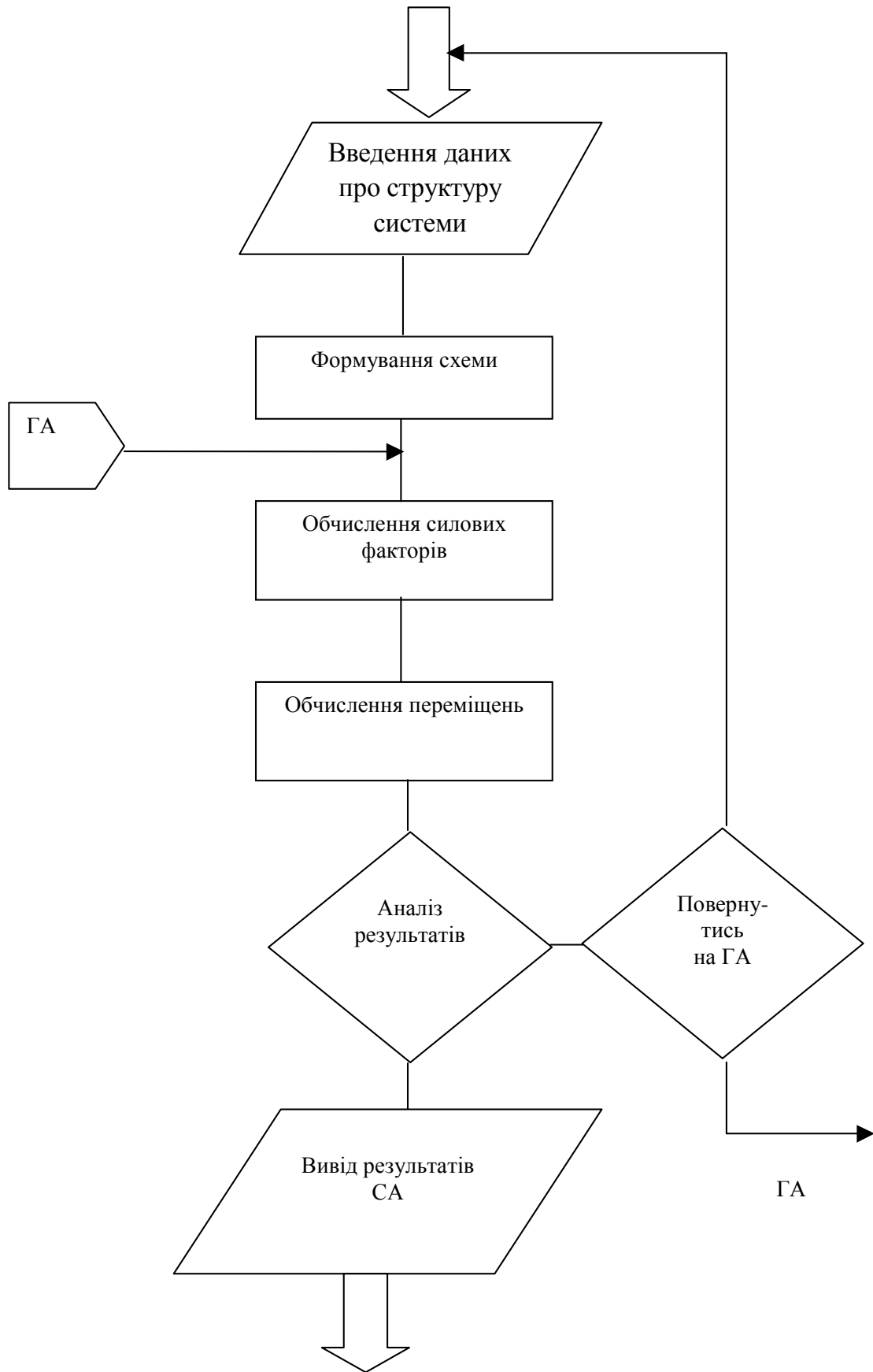
в) 0 – свідчить про те, що даний полюс багатополюсника не входить в контур, який розглядаємо.

Матриця G^{**} має вигляд:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} G_1^{**} & G_2^{**} & \dots & G_i^{**} & \dots & G_k^{**} \end{array} \right]^{**} \quad (18)$$

де j – номер багатополюсника, яка має розміри $b_{kp} \times b_m$, (m – кількість полюсів j -го багатополюсника, p – сумарна кількість полюсів всіх багатополюсників). Всі елементи підматриці G_j^{**} нульові, крім діагональних елементів блоку, обмеженого рядками n_p і $n_p + b_m + 1$ ($n_p = \sum_{i=1}^{j-1} n_i$, i – кількість полюсів i -го багатополюсника), які дорівнюють одиниці.

Запропонований метод статичного аналізу реалізовано у вигляді процедури, схема якої наведена на рисунку.



Структурна схема статичного аналізу

Дана процедура містить таку послідовність етапів:

- введення даних про структуру системи у випадку, коли попередньо не проводиться геометричний аналіз. Вводиться інформація про склад системи, кількість елементів, їх взаємне розміщення, матриці перетворення координат, вектор зовнішніх сил і зовнішніх переміщень (якщо вони наявні);
- на наступному етапі формується схема (нумеруються вузли і виділяються незалежні контури). У випадку попереднього проведення геометричного аналізу передбачається можливість використання його результатів (матриць перетворення координат, даних про структуру системи);
- обчислення силових факторів та переміщень перерізів проводиться після формування системи (2.15), (2.16) із використанням чисельних методів;
- аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок про можливість закінчення аналізу чи повернення до попередніх етапів;
- етап виводу результатів надає можливість передачі вихідних даних статичного аналізу для наступного динамічного аналізу і їх збереження.

Розроблений метод статичного аналізу дозволяє враховувати особливості реальних конструкцій ЕА і базується на рівняннях рівноваги силових факторів у перерізах та умовах нерозривності..

Використання методу діакоптики та побудова аналізу у вигляді послідовного ітераційного процесу дозволяє ефективно застосувати методи об'єктно-орієнтованого проектування та програмування.

З погляду об'єктно-орієнтованого проектування запропонований метод статичного аналізу та процедура його реалізації дозволяють побудувати послідовний ітераційний процес, який повністю вкладається в розроблену загальну методичку моделювання складних механічних систем [2].

1. Каркульовський В.І., Мотика І.І. Моделювання складних механічних систем. Геометричний аналіз // Вісн. ДУ "Львівська політехніка", – 2001. – № 415. – С. 7 – 10.
2. Каркульовський В.І., Мотика І.І. Об'єктно-орієнтований підхід в проектуванні складних механічних систем // Вісн. ДУ "Львівська політехніка", – 1998. – № 377. – С. 26 – 30.