УДК 681.3:519.15

В. Різник, О. Різник, І. Юрчак, В. Пороховський
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра АСУ

СИНТЕЗ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ІДЕАЛЬНИХ КІЛЬЦЕВИХ В'ЯЗАНОК

Показано можливість застосування нового класу числових конструкцій – ідеальних кільцевих в'язанок для синтезу циклічних блок-схем, що може бути використано, наприклад, в задачах планування оптимального експерименту та стиснення інформації.

It is shown possibility for application new class of numerical constructions, namely "Ideal Ring Bundles" for synthesis of cyclic block-designs that can be useful, for example, in problems of optimal planning of experiments as well as for compressing of information.

Комбінаторні моделі та методи оптимізації застосовують для найрізноманітніших наукових і практичних потреб, зокрема для моделювання і проектування. Впровадження нестандартних методів синтезу оптимальних комбінаторних моделей для розв'язування системотехнічних задач сприяє розвитку прогресивних інформаційних технологій. Перехід від традиційних теоретико-множинних до системних принципів опису об'єктів пов'язаний з удосконаленням існуючих та розробленням нових типів комбінаторних моделей, дослідженням їх особливостей і можливостей для практичної реалізації. На передній план виступають комбінаторні моделі, для яких основна роль відводиться поняттю системи інцидентності [1 – 2]. Серед таких моделей набули поширення блок-схеми.

Під блок-схемою розуміють розміщення елементів множини $\{b_i\}$, і=1,…,ν в a підмножинах B_j, j=1,…,a, або блоках з однаковим числом елементів k_j=k, A_j=1,…,a в кожному блоці, причому елемент b_i належить до r_i різних блоків, а кожна p-та пара різних елементів (b_i, b_j), $i \neq j$, $p = 1,2,\ldots,\nu(\nu\text{-}1)/2)$ трапляється в λ блоках. Частковим випадком блок-схеми є зрівноважена неповна блок-схема (balanced incomplete block design), або скорочено ВІВ-схема [2]. ВІВ-схеми утворені на основі множини ν різних елементів ($i \neq j$) з кількістю елементів k у кожному блоці.

Між параметрами ν, a, k, r, λ ВІВ-схеми існують залежності:

$$a\,k = \nu\,r, \qquad r\,(k - 1) = \lambda\,(\nu - 1) \tag{1}$$

ВІВ-схема називається симетричною, якщо $\nu = a$ і циклічною, коли для неї існує циклічний автоморфізм, який полягає в тому, що зміна індексів $j \rightarrow j+1(mod\,\nu)$ при всіх k елементах j-го блоку ВІВ-схеми приводить до утворення множини елементів $(j+1(mod\ \nu))$-го блоку цієї схеми і, отже, елементи будь-якого блоку повністю визначає всю ВІВ-схему [2].

Інтерес до циклічних блок-схем та інших комбінаторних конфігурацій значною мірою викликаний можливостями їх застосування в теорії планування експерименту [3], кодування

[1], в задачах синтезу оптимальних дискретних сигналів [4] та в інших оптимізаційних задачах. Тому актуальною проблемою є синтез комбінаторних конфігурацій з широким спектром заданих параметрів. Один з підходів полягає у використанні для цієї мети ідеальних кільцевих в'язанок (ІКВ). Ідеальна кільцева в'язанка – це послідовність $K_n=\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ цілих додатних чисел, які разом з усіма можливими сумами поруч розміщених чисел вичерпують значення чисел натурального ряду від 1 до $n(n\text{-}1)/R$ точно R разів, причому елементи k_1 і k_n вважаються суміжними. ІКВ визначається параметрами n і R.

Легко показати, що ІКВ з параметрами n і R відповідає циклічна блок-схема на множині елементів $\{b_i\} = \{j\}$, j =1,…, $n(n\text{-}1)$ [5]. Отже, циклічну блок-схему з параметрами v, k , λ можна завжди подати у вигляді відповідної ІКВ з параметрами $n = k$, $R = \lambda$. Моделювання дещо ускладнюється тим, що в загальному випадку порядок розміщення елементів у кожному окремому блоці ВІВ-схеми, як і самих її блоків, не регламентується. Однак таке ускладнення легко усувається, коли всі $k = n$ елементи будь-якого з блоків цієї схеми замінити числовими значеннями 1,2, …, v їх порядкових номерів на множині $\{b_i\}$, (i =1,…, v).

Розглянемо приклад, який ілюструє можливість побудови циклічної ВІВ-схеми з параметрами $v = 13$, $k = 4$, $\lambda = 1$ за допомогою ідеальної кільцевої в'язанки з параметрами $n = k = 4$, $R = \lambda = 1$. Для моделювання доцільно використати алгоритм вибіркових переміщень, який полягає в обчисленні кільцевих сум на впорядкованих послідовностях натуральних чисел та взаємному переміщенні цих чисел [5]. За вхідними даними $n = 4$, $R = 1$ та елементами ІКВ ($k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 6$, $k_4 = 4$) легко побудувати перший блок циклічної блок -схеми:

$$\begin{aligned} B_1&: b_1=k_1=1,\\ b_2&=b_1+k_2=3,\\ b_3&= b_2+k_3=9,\\ b_4&= b_3+k_4=13. \end{aligned} \tag{2}$$

Решта блоків знаходяться циклічним зсувом довжиною v =13 знайдених вище елементів першого блоку цієї блок-схеми. В результаті побудови одержуємо:

$$\begin{aligned} &B_1: (1, 3, 9, 13),\\ &B_2: (2, 4, 10, 1),\\ &B_3: (3, 5, 11, 2),\\ &B_4: (4, 6, 12, 3),\\ &B_5: (5, 7, 13, 4),\\ &B_6: (6, 8, 1, 5),\\ &B_7: (7, 9, 2, 6),\\ &B_8: (8, 10, 3, 7),\\ &B_9: (9, 11, 4, 8),\\ &B_{10}: (10,12, 5, 9),\\ &B_{11}: (11,13,6,10),\\ &B_{12}: (12,1, 7, 11),\\ &B_{13}: (13,2, 8, 12). \end{aligned} \tag{3}$$

У даному випадку моделювання дало змогу не лише побудувати циклічну BIB-схему з множиною елементів $\{b_i\}=\{1,2, \ldots,13\}$ і параметрами $\nu=11$, $k=n=5$, $\lambda = R = 2$, але й виявити особливості її структурної організації, у якій ключову роль відіграє впорядкована числова послідовність (1,2,6,4).

Відповідність параметрів ІКВ та циклічних BIB-схем дозволяє виявляти глибинні взаємозв'язки між різними типами BIB-схем, генерувати множини комбінаторних конфігурацій з циклічною структурою, досліджувати їх властивості, перевіряти умови існування різних типів циклічних BIB-схем та знаходити для них нові практичні застосування.

Слід зазначити, що поруч з одновимірними ІКВ для моделювання комбінаторних конфігурацій можуть використовуватися більш складні комбінаторні конструкції, що складаються з елементів, кожен з яких є впорядкованим набором чисел. В останньому випадку з'являється можливість моделювання за допомогою багатовимірних ІКВ.

Моделювання здійснюється за впорядкованими послідовностями числових наборів, всі кільцеві вектор-суми яких вичерпують цілочислові координати точок у деякій локальній області t-вимірного простору. Під кільцевою вектор-сумою слід розуміти суму поруч записаних векторів t-вимірної ІКВ, що беруться з урахуванням відповідних значень модулів $l_1,l_2,\ldots,l_t$.

Нижче наведена таблиця кільцевих вектор-сум, побудована за двовимірною ІКВ четвертого порядку ((1,1),(1,2),(1,4),(1,3)), $l_1=4$, $l_2=5$:

$$\begin{array}{c} (1,1)\ (2,3)\ (3,2)\ (0,0), \\ (0,0)\ (1,2)\ (2,1)\ (3,4), \\ (3,3)\ (0,0)\ (1,4)\ (2,2), \\ (2,4)\ (3,1)\ (0,0)\ (1,3). \end{array} \tag{4}$$

Елементи ІКВ розміщені у клітинках головної діагоналі. Легко побачити, що всі кільцеві вектор-суми, за виключенням (0,0), вичерпують значення впорядкованих чисел 2-наборів, елементами яких є відповідно числа, що належать множинам {1,2,3} та {1,2,3,4}.

За аналогією до двовимірних можна побудувати таблиці кільцевих вектор-сум для багатовимірних ІКВ.

Розглянуті конструкції можна застосовувати для моделювання векторних комбінаторних конфігурацій, використовуючи властивості ідеальних кільцевих в'язанок.

1. Тончев В.Д. Комбинаторные конфигурации. Блок-схемы, коды, графы. – К., 1988. 2. Холл М. Комбинаторика. М., 1970. 3. Маркова Е.В., Денисов В.И., Полетаева И.А. и др. Дисперсионный анализ и синтез планов эксперимента на ЭВМ. – М., 1982. 4. Свердлик М.Б. Оптимальные дискретные сигналы. – М., 1975. 5. Різник В.В. Комбінаторні моделі систем на в'язанках чисел. – К.: Препр.ІТФ-89-47Р, 1989.