

УДК 518.61

О. Нечай

Національний університет "Львівська політехніка", кафедра ПМ

## ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЧИСЕЛОВИХ МЕТОДІВ ГІРА ТА ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ НАБЛИЖЕНЬ ПРИ СТВОРЕННІ МОДЕЛІ ГЕНЕРАТОРА ГАРМОНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

© Нечай О. М., 2002

Наведено математичну модель автогенератора гармонічних коливань, для дослідження параметрів якої використано як метод Гіра, так і дробово-раціональні методи обчислення. Проаналізовані результати дослідження та виявлено ефективність використання дробово-раціонального методу для розрахунку подібних задач.

This article presents the mathematical model of the automatic generator of the harmonious vibration. The methods of the Gir and fraction-rational calculation are used for the investigation of its measures. The results are analyzed and compared with the other analytical method of investigation. The efficiency of the usage of the fraction-rational method for the calculation of such tasks is confirmed.

Проблеми розрахунку коливальних генераторних схем пов'язані з великою швидкістю зміни коливань, тобто їх частотою, яка в сучасних електронних пристроях сягає сотні і тисячі кілогерц. Необхідність створення методики побудови та адекватні моделі таких генераторів на сучасному етапі розвитку елементної бази є вкрай необхідна.

Розглянемо роботу схеми  $RC$  – автогенератора синусоїдальних гармонічних коливань, яка побудована за ємнісною триточковою схемою на польовому транзисторі (рис. 1).

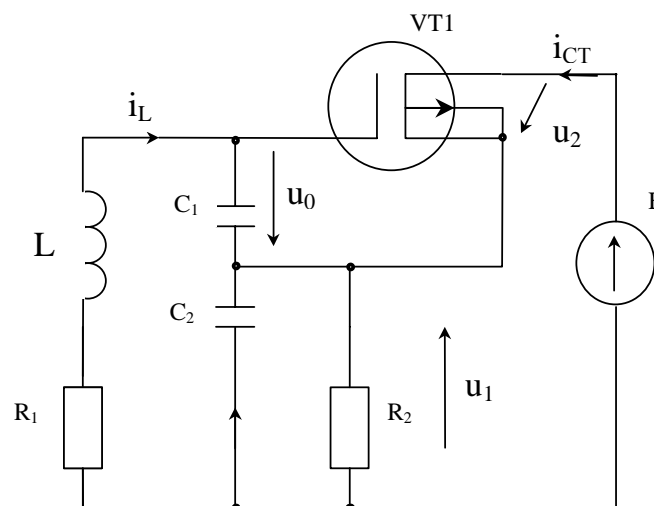


Рис. 1.

Автогенератор на польовому транзисторі має на вході резонансне LC-коло, параметри якого визначають частоту коливального процесу як у вхідному, так і у вихідному колі. Резистор  $R_2$  забезпечує положення робочої точки в активному режимі транзистора, необхідний режим живлення польового транзистора та виконує роль опору навантаження.

При добротності контура близько 30 час, коли коливання контура стають стабільними, відповідає близько 300 періодам. У схемі генератора синусоїдальних коливань може бути застосований і біполярний транзистор, тоді у схему даються опори, які мають забезпечити робочу точку та блокуючими конденсаторами. Вибравши польовий транзистор, який має індукований канал, вхідний опір якого дуже великий, за основу схеми (він фактично не впливає на добротність контура) схема спрощується і, відповідно, простішим буде розрахунок роботи схеми. Якщо ж взяти польовий транзистор іншого типу, то потрібно ввести в схему додатковий резистор для забезпечення робочої точки його статичної вольт-амперної характеристики, що вказує на оптимальність вибору схеми автогенератора.

У початковий момент часу вихідна напруга дорівнює напрузі джерела і всі струми в колі дорівнюють нулю. Коли з'явиться від'ємна напруга на затворі, він перекидає канал, і струм у вихідному колі зменшується. Добротність контура створюється при конкретних значеннях компонентів схеми та польового транзистора. Дана схема одержує гармонійний сигнал амплітудою від 0,9 – 5,5 В при напрузі джерела живлення 10 В залежно від вибору параметрів схеми. Для дослідження роботи цієї схеми доцільно змінювати опір резистора  $R$ , крутизну транзистора, ємності в схемі та співвідношення між ними, що буде впливати як на частоту, так і на амплітуду сигналу. Можна також змінювати добротність контуру резистором  $R$  та напругу живлення схеми.

В найзручніший спосіб за законами Кірхгофа (метод контурних струмів та вузлових напруг) наведемо фізичну модель генератора у вигляді рівнянь:

$$i_L - C_1 \cdot \frac{du_0}{dt} = 0, \quad (1)$$

$$-i_L - C_2 \cdot \frac{du_1}{dt} - i_{CT} - \frac{u_1}{R_2} = 0, \text{ де } i_{CT} = f(u_0, u_2), \quad (2)$$

$$R_1 \cdot i_L + L \cdot \frac{di_L}{dt} + u_0 - u_1 = 0, \quad (3)$$

де

$$u_2 - u_1 - E = 0. \quad (4)$$

Струм стоку подаємо у вигляді

$$i_{CT} = (1 + \lambda \cdot u_2) [\sigma(u_0 + 3,5) \cdot 0,35 \cdot (u_0 + 3,5) + 4,2 \cdot \sigma(u_0 + 2,2) \cdot (u_0 + 2,2)] \cdot 10^{-3} \text{ А},$$

складові рівняння якого визнаються функцією Хевісайда

$$\sigma^1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u_0 \geq 3,5 \\ 0, & \text{якщо } u_0 < 3,5 \end{cases} \quad \sigma^2 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u_0 \geq 2,2 \\ 0, & \text{якщо } u_0 < 2,2 \end{cases} \quad (5)$$

У конкретному випадку при параметрах елементів кола:

$$E = 10 \text{ В}, R_1 = 6,8 \text{ Ом}, R_2 = 996 \text{ Ом}, L = 277 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}, \\ C_1 = 14,7 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}, C_2 = 22 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}, \lambda = 7,5 \cdot 10^{-3}.$$

проведемо розрахунок змінних величин кола  $i_L, u_0, u_1, u_2$ . Для зручності оперування математичними величинами представимо модель генератора у вигляді

$$\begin{cases} L \cdot \frac{di_L}{dt} = -R_1 \cdot i_L - u_0 + u_1 \\ C_2 \cdot \frac{du_1}{dt} = -i_L - i_{CT} - \frac{u_1}{R_2} \\ C_1 \cdot \frac{du_0}{dt} = i_L \\ u_2 - u_1 - E = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Вихідна напруга автогенератора є близькою до гармонічної, що залежить від добротності коливального контура. Добротність даного контура визначається співвідношенням  $\frac{\omega L}{R}$ , де  $\omega$  – частота, на якій генерує генератор.

Ця резонансна частота приблизно дорівнює  $\frac{1}{\sqrt{L \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}$ .

Були спроби розв'язати цю математичну задачу даної моделі числовими методами Гіра і Рунне-Кутта 4-го порядку.

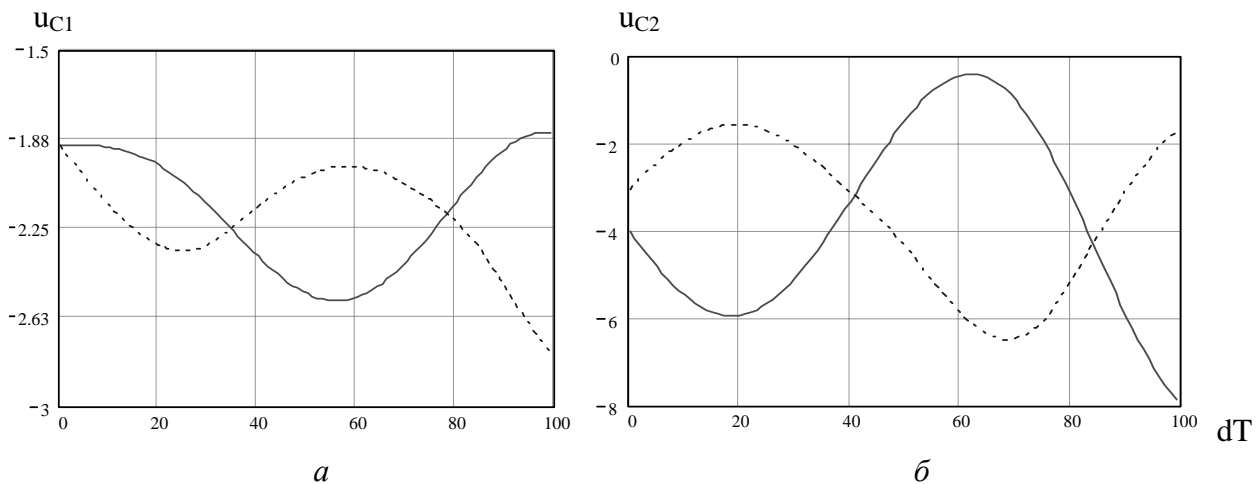


Рис. 2. Результати розрахунку вихідної напруги методом Гіра 4-го порядку:  
а) при запуску генератора; б) через 5 періодів після запуску

Взявши до уваги, що  $dT = \frac{T}{20}$ , тобто розрахунок проводився з кроком  $T = 5,083 \cdot 10^{-7}$ , (згідно з рис. 2, б) обчислюємо період коливань  $(82 - 0) \cdot 5,083 \cdot 10^{-7} = 0,0000416806$  с, тобто частота коливань генератора у цьому випадку становить 23 992 Гц, або приблизно 24 кГц.

Для підвищення точності і стійкості результатів при дослідженні вищевказаних процесів використаємо однокрокові дробово-раціональні методи [1], з такими співвідношеннями:

Для наближення 2,3,4,5 порядків узгодженості (2.53)

$$y_{n+1}^{[p]} = \frac{T_{p,n} - \frac{3}{5}hJ_n T_{p-1,n} + \frac{3h^2}{20}J_n^2 T_{p-2,n} - \frac{h^3}{60}J_n^3 T_{p-3,n}}{E - \frac{3}{5}hJ_n + \frac{3h^2}{20}J_n^2 - \frac{h^3}{60}J_n^3}, p = \overline{2,5}, \quad (7)$$

де  $T_{-1,n} = 0$ , загальна операторна функція

$$D_p(\delta) = \frac{1 - \frac{2}{5}\delta + \frac{1}{20}\delta^2}{1 + \frac{3}{20}\delta + \frac{3}{20}\delta^2 + \frac{1}{60}\delta^3}. \quad (8)$$

Для наближення 1-4-го порядків узгодженості

$$y_{n+1}^{[p]} = \frac{T_{p,n} - \frac{3}{4}hJ_n T_{p-1,n} + \frac{h^2}{4}J_n^2 T_{p-2,n} - \frac{h^3}{24}J_n^3 T_{p-3,n}}{E - \frac{3}{4}hJ_n + \frac{h^2}{4}J_n^2 - \frac{h^3}{24}J_n^3}, p = \overline{1,4}, \quad (9)$$

де  $T_{-1,n} = T_{-2,n} = 0$  операторна функція

$$D_p(\delta) = \frac{1 - \frac{1}{4}\delta}{1 + \frac{3}{4}\delta + \frac{1}{4}\delta^2 + \frac{1}{24}\delta^3}. \quad (10)$$

Для наближення 3-7-го порядків узгодженості

$$y_{n+1}^{[p]} = \frac{T_{p,n} - \frac{4}{7}hJ_n T_{p-1,n} + \frac{h^2}{4}J_n^2 T_{p-2,n} - \frac{2h^3}{105}J_n^3 T_{p-3,n} + \frac{h^4}{840}J_n^4 T_{p-4,n}}{E - \frac{4}{7}hJ_n + \frac{h^2}{4}J_n^2 - \frac{2h^3}{105}J_n^3 + \frac{h^4}{840}J_n^4}, \quad p = \overline{3,7}, \quad (11)$$

де  $T_{-1,n} = 0$  мають операторну функцію,  $T_{p,n}$  – тейлорівське наближення розв'язання систем (1÷4),  $J_n$  – значення матриці Якобі правих частин цієї системи.

Апроксимація Тейлорівських наближень відповідних порядків забезпечується однокроковими методами типу Рунге-Кутта згідно з їх наведенням виразом

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2), \quad k_4 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_5 &= hf(x_n + h, y_n + k_4), \end{aligned} \quad (12)$$

тоді

$$\begin{aligned} T_{1n} &= y_n + k_1, \quad T_{2n} = y_n + k_2, \quad T_{3n} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \\ T_{4n} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_4 + k_5) \end{aligned} \quad (13)$$

значення  $J_n$ , що входить у (2.20)\*, визначаємо шляхом безпосереднього диференціювання правої частини системи по  $y$ , або чисельним диференціюванням.

Після підстановки у наведені вище формули значень  $T_{kn}$ , визначених співвідношеннями (4.2), одержимо методи, порядки яких збігаються з порядками узгодженості наближень вихідних формул. Стійкість одержаних однокрокових методів збігається із стійкістю відповідних їм формул наближення.

Розглянемо результати розрахунку даної моделі методами дробово – раціональних наближень (рис. 3).

За результатами обчислень (згідно з рис. 3) визначаємо частоту коливань автогенератора. Вона становить близько 100 кГц. Амплітуда коливань вихідної напруги становить 4,6 Вольта.

Аналіз цих результатів показує, що дробово-раціональні методи дозволяють одержати достовірну картину змінної вихідної напруги, що відповідає повністю результатам фізичного експерименту роботи генератора гармонічних коливань на польовому транзисторі.

Відомо, що методи Гіра вище другого порядку мають обмежену область стійкості, тобто не є А-стійкими. Тому для досягнення відповідної точності необхідно брати дуже малий крок для одержання достовірних результатів, що в свою чергу породжує накопичення

\* Слоньовський Р.В., Яремко Т.М. Чисельні методи розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь. – Львів, ЛПІ, 1990.

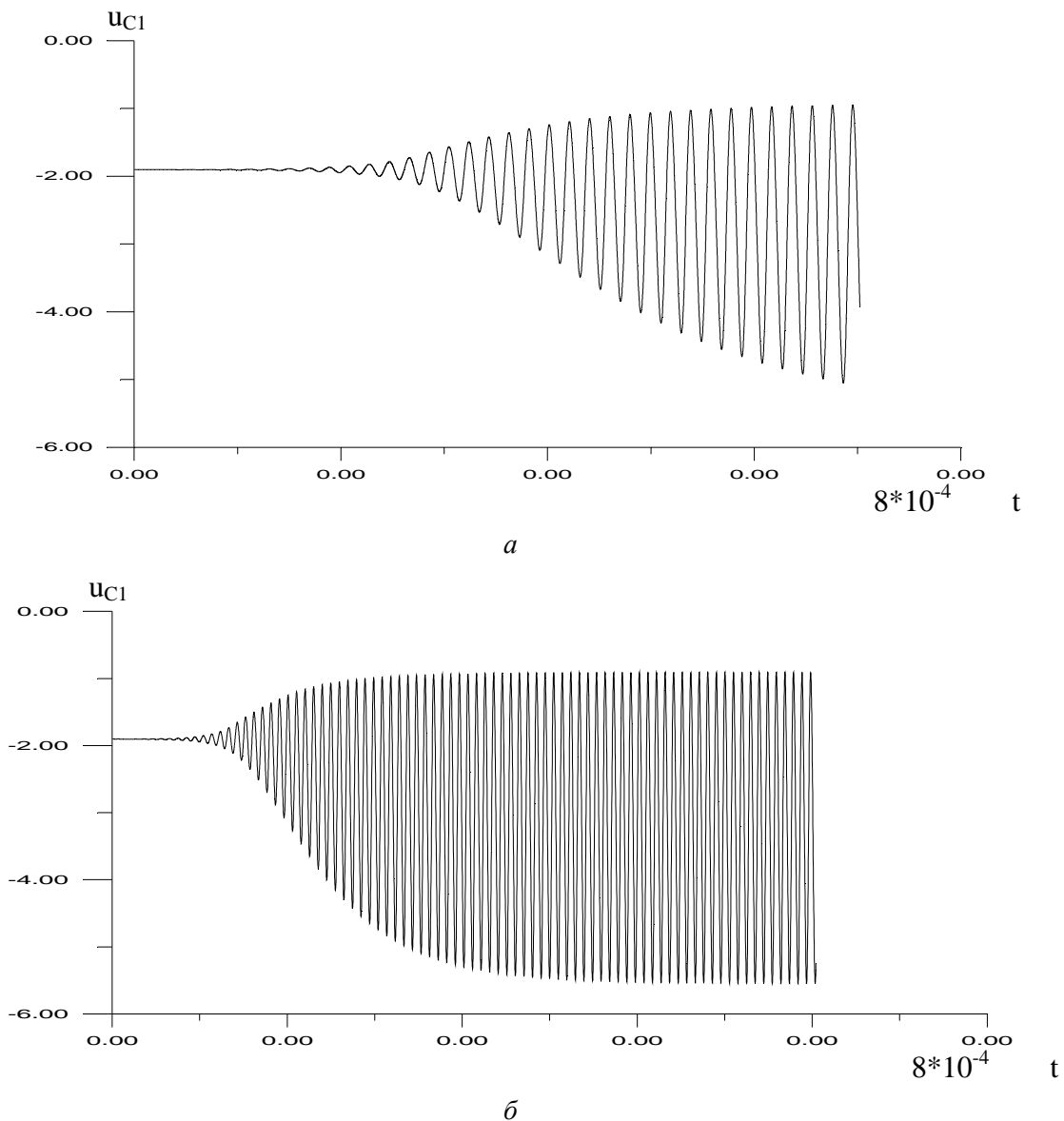


Рис. 3. Результати розрахунку вихідної напруги дробово – раціональними методами:  
а) при запуску генератора; б) до усталеного коливного процесу

похибок заокруглення навіть при зменшенні кроку інтегрування. Це приводить до значних обчислювальних затрат та затрат часу. Отже, ми не можемо досягнути потрібного результату, тому що похибки нагромадження будуть перекривати цінний для нас результат. Існують такі задачі, зокрема та, модель якої подано в роботі, для яких метод Гіра є недостатньо придатним для обчислення.

Дробово-раціональні методи – як багатокроковий, так і однокроковий – не мають цих недоліків, адже доведено, що будь-якого порядку дробово-раціональні методи є А- або L-стійкими залежно від вибору їх параметрів. Крім цього, глобальна похибка із часом не наростає, і це дозволяє нам стверджувати, що ми можемо проводити інтегрування з досить великим кроком. І ще одна важлива властивість: дробово-раціональні методи при своїй реалізації не вимагають розв'язання нелінійних систем алгебраїчних рівнянь, що значно пришвидшує процес розв'язання рівнянь такими методами.

Такі переваги і дозволяють використовувати ці методи для досягнення достовірних результатів при дослідженні математичних моделей важливих динамічних процесів.