

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТОВСТОСТІННИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРІВ

© Макар В.М., 2007

**У межах моделі лінійної просторової теорії пружності анізотропного тіла запропоновано чисельно-аналітичний підхід до розв'язування задачі про вільні коливання тіл циліндричної форми. Отримано слабку варіаційну форму задачі про вільні коливання, узагальнений розв'язок якої побудовано на основі напіваналітичного методу скінченних елементів з розкладом у тригонометричний ряд за кутовою координатою. Досліджено вільні коливання анізотропних товстостінних циліндрів скінченної довжини за різних умов закріплення торців.**

**A numerically-analytical approach to solution of the free vibration problem for anisotropic hollow circular cylinders of finite length within the framework of 3D linear elasticity theory is presented. The weak form of the governing differential equations is obtained and solved by using the semianalytical finite element method with terms of trigonometric series in the angular coordinate. The dimensions of the cylinders are arbitrary, and wide range of composite materials can be considered.**

**Вступ.** Сучасний стан галузі систем автоматизації проектування (САПР) складних механічних об'єктів характеризується ускладненням вимог і задач, які постають перед проектувальниками. Це пов'язано з тим, що на перший план виходять не стільки конструкторсько-проектувальні проблеми, які досить успішно розв'язані в сучасних САПР, скільки задачі суто математичного характеру, оскільки користувачам часто необхідно проводити також розрахунок та аналіз пружно-деформівного стану об'єкта проектування. Тому завдання створення адекватного математичного забезпечення САПР механіки сьогодні є актуальним. Насамперед це стосується задач дослідження динамічних характеристик, зокрема власних частот та власних форм коливань різних конструктивних елементів циліндричної форми, поширених в машинобудуванні, будівництві тощо. Розв'язання таких задач пов'язане із значними труднощами, обумовленими складністю системи диференціальних рівнянь в частинних похідних та необхідністю врахування різних граничних умов на торцях. Ці труднощі зростають у випадку дослідження циліндрів з анізотропного матеріалу. Зазначимо, що в літературі є небагато робіт про вільні коливання циліндрів скінченної довжини у межах теорії пружності для ізотропного матеріалу [1–4] і ще менше робіт – для анізотропного матеріалу [5–7]. Більше того, більшість з них присвячені дослідженню суцільних циліндрів. Порожнисті циліндри в основному досліджуються у межах теорій оболонки, що накладає досить жорсткі умови стосовно геометричних розмірів [8]. Тому метою цієї роботи є дослідження на основі розвинутого у попередніх роботах автора [7, 9–10] чисельно-аналітичного підходу, вільних коливань анізотропних порожнистих циліндрів скінченної довжини у межах просторової лінійної теорії пружності. В основу цього підходу покладено напіваналітичний метод скінченних елементів (МСЕ), питання застосування якого для дослідження вільних коливань тривимірних неоднорідних тіл розглянуто в роботах [11]. Основна ідея цього методу полягає в тому, що за кутовою координатою шукані функції розкладаються в тригонометричний ряд. Тоді розв'язання вихідної просторової задачі зводиться до розв'язання послідовності двовимірних задач відносно невідомих функцій-коефіцієнтів розкладу. У роботі також досліджено точність та збіжність отриманих наближених значень власних частот коливань на різних скінченно-елементних сітках та за різних умов закріплення торців.

**Постановка проблеми у загальному вигляді.** Нехай циліндр скінченної довжини  $L$ , радіуса  $R$  і товщини  $H$ , матеріал якого є анізотропним, займає обмежену область  $\Omega \in \mathbf{R}^3$  з неперервною за Ліпшицем границею  $\Gamma$ . Віднесемо його до ортогональної циліндричної системи координат  $(r, \theta, z)$ . Розглядатимемо циліндри, геометричні і механічні параметри яких обумовлюють проведення досліджень у межах теорії пружності. У загальному випадку власні коливання циліндра досліджуватимемо в просторовій постановці. Переміщення точок циліндра в цьому випадку характеризується величинами  $u_r(r, \theta, z), u_\theta(r, \theta, z), u_z(r, \theta, z)$ , для визначення яких виходитимемо з рівнянь руху [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \omega^2 u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} &= \rho \omega^2 u_\theta \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= \rho \omega^2 u_z, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\rho$  – задана густина матеріалу циліндра,  $\omega$  – невідома кругова частота коливань. Вважаємо також, що існують геометричні лінійні співвідношення Коші і фізичні співвідношення узагальненого закону Гука, які в матричній формі можна подати у вигляді

$$\mathbf{e} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{z\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{y} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{z\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{z\theta} \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

відповідно. Співвідношення узагальненого закону Гука (3) містять 9 незалежних пружних констант, що відповідає найпоширенішим частковим випадкам анізотропії пружного матеріалу.

Рівняння (1)–(3) треба доповнити граничними умовами. Оскільки при вільних коливаннях відсутні зовнішні навантаження, то всю поверхню циліндра вважаємо ненавантаженою, тобто:

$$\sum_{i,j}^3 \sigma_{ij} n_j = 0, \quad i, j = r, \theta, z \quad \text{на } \Gamma, \quad (4)$$

де  $n_j$  – компоненти зовнішнього одиничного вектора нормалі до поверхні циліндра. Крім того, на торцях циліндра ( $z = -L/2, z = L/2$ ) задаємо граничну умову вигляду

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (5)$$

де  $\mathbf{g} = (g_r, g_\theta, g_z)^T$  – вектор заданих переміщень. З умови (5) як часткові випадки можна отримати найпоширеніші випадки закріплення торців, а саме: повне жорстке защемлення, шарнірне закріплення і вільний торець.

Треба зазначити, що граничні умови, які задаються на торцях, необхідно сформулювати так, щоб зафіксувати переміщення циліндра в осьовому напрямі.

**Постановка завдання.** Підставимо співвідношення (2) в (3). Отримані вирази, що зв'язують компоненти тензора напружень з компонентами вектора переміщень, підставимо до рівняння (1). Після нескладних перетворень отримаємо систему диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій  $u_r, u_\theta, u_z$ :

$$d_{11} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + d_{44} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + d_{66} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + (d_{12} + d_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} + (d_{12} - d_{23}) \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} +$$

$$+ d_{13} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial r} - (d_{33} + d_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - d_{33} \frac{1}{r^2} u_r = \rho \omega^2 u_r, \quad (6)$$

$$d_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + d_{33} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + d_{55} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - d_{66} \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + (d_{13} + d_{66}) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + (d_{33} + d_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} +$$

$$+ (d_{55} + d_{23}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - d_{66} \frac{1}{r^2} u_\theta = \rho \omega^2 u_\theta, \quad (7)$$

$$d_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + d_{55} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + d_{22} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + d_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + (d_{12} + d_{44}) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + (d_{23} + d_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} +$$

$$(d_{55} + d_{23}) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} = \rho \omega^2 u_z. \quad (8)$$

Для ізотропного матеріалу з рівнянь (6)–(8) як частковий випадок можна отримати добре відомі рівняння руху Ляме [4].

Отже, задача полягає у визначенні вектора переміщень  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)^T$  і кругової частоти  $\omega$ , які задовольняють рівняння руху (6)–(8) та граничні умови (4)–(5).

**Варіаційна постановка задачі про вільні коливання.** З метою використання методу скінченних елементів (МСЕ) для числового розв'язання вищезазначеної задачі перейдемо до еквівалентної варіаційної постановки. Для цього уведемо до розгляду простір допустимих вектор-функцій

$$Q = \left\{ \mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)^T : v_i = 0 \text{ на } \Gamma_u, v_i \in H^1(\Omega), i = r, \theta, z \right\},$$

де  $H^1(\Omega)$  – простір Соболева функцій, інтегрованих з квадратом в області  $\Omega$  разом з їхніми першими похідними,  $\Gamma_u$  – частина границі області, на якій задані граничні умови вигляду (5).

Домножимо скалярно рівняння руху (6)–(8) на довільну функцію  $\mathbf{v} \in Q$ . Результат проінтегруємо в області  $\Omega$  з врахуванням формули Гріна та граничних умов (4) – (5). У підсумку отримаємо варіаційне рівняння вигляду

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \omega^2 m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in Q, \quad (9)$$

з такими виразами для білінійних форм  $m(\mathbf{u}, \mathbf{v}), a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ :

$$m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho (u_r v_r + u_\theta v_\theta + u_z v_z) d\Omega,$$

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_{\Omega} \left\{ d_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + d_{12} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \right. \\
& + \frac{d_{13}}{r} \left( u_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right) + d_{22} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\
& + \frac{d_{23}}{r} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{d_{33}}{r^2} (u_r v_r + \\
& + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} v_r + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} u_r) + d_{44} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \right. \\
& + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial r} \left. \right) + d_{55} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right] + \right. \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \right] + \left. \left[ \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right] \left[ \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \\
& \left. + d_{66} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) \right\} d\Omega.
\end{aligned}$$

Тоді можна сформулювати таку варіаційну задачу для знаходження узагальненого розв'язку задачі про вільні коливання (4) – (8): знайти пару  $(\mathbf{u}, \omega) \in Q \times \mathbf{R}$  таку, що виконується варіаційне рівняння:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega^2 m(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in Q. \quad (10)$$

**Схема МСЕ розв'язання варіаційної задачі.** Числову схему розв'язання варіаційної задачі (10) побудуємо на основі напіваналітичного методу скінченних елементів [11]. Основна ідея цього методу полягає в тому, що за однією з незалежних змінних, в нашому випадку  $\theta$ , базисні функції є аналітичними функціями, визначеними на всьому проміжку визначення цієї змінної. Тоді розв'язання вихідної просторової варіаційної задачі зводиться до розв'язання послідовності двовимірних задач відносно невідомих функцій, які є коефіцієнтами розкладу в ряд Фур'є.

Визначимо  $Q_{hm}$  скінченномірний підпростір з  $Q$  з базисом  $N_1(r, z), \varphi_0(\theta), \dots, N_L(r, z), \varphi_m(\theta)$ . Тоді невідомі переміщення шукатимемо так:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h(r, z, \theta) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=0}^m N_i(r, z) \varphi_j(\theta) \mathbf{U}^{ij}, \quad (11)$$

де  $\varphi_j(\theta), j = 0, \dots, m$  – система тригонометричних функцій, а саме, для апроксимації компонент  $u_r, u_z$  система функцій  $\varphi_j(\theta)$  має вигляд  $\varphi_j(\theta) = \{1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos m\theta, \sin m\theta\}$ , а для апроксимації переміщення  $u_{\theta}$  –  $\varphi_j(\theta) = \{1, \sin \theta, \cos \theta, \dots, \sin m\theta, \cos m\theta\}$ ;  $N_i(r, z)$  – лінійні або квадратичні базисні функції МСЕ на чотирикутних скінченних елементах сирендипового типу.

Підставимо (11) в рівняння (10). Послідовно приймаємо, що  $\mathbf{v} = N_i \varphi_j, i = 1, \dots, L, j = 0, \dots, m$ , з врахуванням властивості ортогональності системи тригонометричних функцій на проміжку  $[0; 2\pi]$ , отримаємо для  $j$ -ї гармоніки алгебраїчну проблему на власні значення

$$\mathbf{A}^{(j)} \mathbf{U}^{(j)} - \omega^2 \mathbf{M}^{(j)} \mathbf{U}^{(j)} = 0. \quad (12)$$

Тут  $\mathbf{M}^{(j)}$  – матриця мас циліндра,  $\mathbf{A}^{(j)}$  – матриця жорсткості циліндра,  $\mathbf{U}^{(j)}$  – вектор вузлових значень власної форми коливань циліндра для  $j$ -ї гармоніки.

Елементи матриць мас і жорсткості обчислюємо з використанням техніки ізопараметричної апроксимації і числового інтегрування на основі формул квадратури Гаусса–Лежандра для чотирикутних скінченних елементів області дискретизації меридіонального перетину. Інтеграл за кутовою координатою обчислюємо в явному вигляді. Власні значення і власні вектори задачі (12) знаходимо методом ітерацій у підпросторі.

**Результати числових досліджень.** Вищенаведений числово-аналітичний підхід апробований автором на прикладах задач про вільні осесиметричні коливання суцільного ізотропного циліндра та циліндра з пружного матеріалу, що володіє симетрією гексагонального типу, з вільними торцями [6]. Достовірність та ефективність цього підходу перевірені шляхом порівняння результатів, отриманих різними методами і авторами. Водночас, в літературі майже відсутні результати аналогічних досліджень для порожнистих циліндричних тіл з анізотропного матеріалу. Тому розглянемо задачу про вільні коливання анізотропних порожнистих циліндрів скінченної довжини за різних граничних умов на торцях. Значення фізико-механічних характеристик пружного матеріалу, який використовувався для проведення розрахунків, наведено у табл. 1. Абсолютні геометричні розміри циліндрів не фіксувалися, що дало змогу дослідити власні коливання циліндрів у широкому діапазоні зміни відношення  $H/R$ .

Таблиця 1

Густина і пружні сталі анізотропного матеріалу циліндра

Величина	Значення
$\rho$	$3,986 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$
$d_{11}$	$4,968 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$
$d_{22}$	$4,981 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$
$d_{55}$	$1,474 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$
$d_{13}$	$1,636 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$
$d_{12}$	$1,109 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$

Власні частоти коливань подамо за допомогою безрозмірного параметра  $\omega^*$  вигляду

$$\omega^* = \omega \cdot R / v_{sz}, \quad (13)$$

де  $\omega$  – розв’язок алгебраїчної задачі на власні значення (12),  $v_{sz} = (1/\rho) \cdot [d_{22} - 2d_{12}^2 / (d_{11} + d_{13})]$ .

Розглянемо спочатку осесиметричні вільні коливання (випадок  $m = 0$  у розкладі (11)), для чого спочатку необхідно дослідити точність та збіжність отриманих наближених значень власних частот коливань на різних скінченно-елементних сітках. У табл. 2 наведено отримані для різної кількості ступенів свободи значення безрозмірного частотного параметра  $\omega^*$  перших п’яти непарних форм коливань для циліндра з  $H/R = 0.5$  і  $L = 1$ . Згідно з [6], непарну форму коливань отримують, якщо осьова компонента вектора переміщень  $u_z$  є непарною функцією відносно координати  $z$ , а радіальна компонента вектора переміщень  $u_r$  – парною функцією по  $z$ . У скінченно-елементному аналізі непарний розв’язок отримують, якщо розглядають половину циліндра за довжиною і задають умову симетрії вигляду  $u_z(r, 0) = 0$ .

Як відомо з теорії МСЕ [13], цей метод забезпечує верхню границю для значень частот вільних коливань, тобто це означає, що послідовність апроксимацій МСЕ власних частот на різних сітках повинна збігатися з точним розв’язком зліва (зверху). Саме такий характер збіжності наближених розв’язків й спостерігається в табл. 2. Форми власних коливань циліндра, що відповідають першим двом частотам, зображено на рис. 1–2.

Таблиця 2

Частотний параметр  $\omega^*$  як функція кількості ступенів свободи

Форма	Кількість ступенів свободи				
	8	21	65	225	833
1	0.989	0.988	0.987	0.987	0.987
2	2.279	2.175	2.167	2.166	2.166
3	3.185	3.173	3.172	3.171	3.171
4	5.672	4.891	4.802	4.794	4.794
5	6.279	5.665	5.513	5.502	5.501

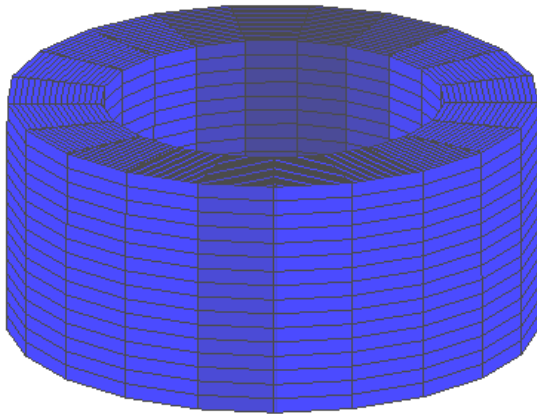


Рис. 1. Перша власна форма коливань циліндра

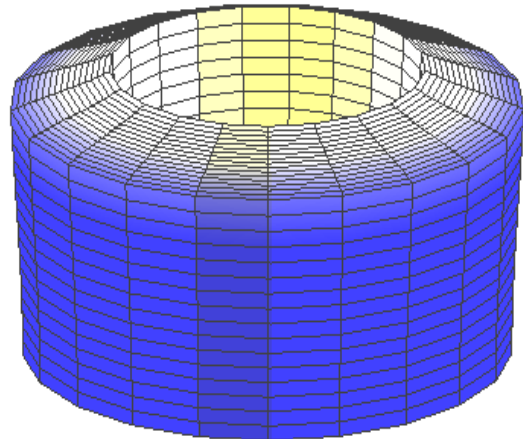


Рис. 2. Друга власна форма коливань циліндра

З метою визначення частотної реакції на різні значення геометричних параметрів та різні умови закріплення торців досліджено залежності значень власних частот залежно від зміни відношення  $H/R$ . У табл. 3–5 наведено результати цих досліджень у вигляді значень частотного параметра  $\omega^*$  для перших трьох форм власних коливань циліндрів різної довжини та товщини. Розглянуто три найпоширеніші на практиці граничні режими на торцях циліндрів, а саме: вільний край, шарнірне та жорстке закріплення. З табл. 3–5 видно, що умови шарнірного та жорсткого закріплення торців порівняно з вільними торцями суттєво впливають на значення власних частот коливань.

Таблиця 3

Частоти вільних коливань порожнистого анізотропного циліндра довжиною  $L = 1$ 

		Відносна товщина $H/R$									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Вільний край	$\omega_1^*$	0.9671	0.9697	0.9740	0.9801	0.9878	0.9972	1.0082	1.0205	1.0339	1.0480
	$\omega_2^*$	1.1380	1.4613	1.7563	1.9883	2.1662	2.3035	2.4112	2.4965	2.5647	2.6190
	$\omega_3^*$	3.0865	3.1861	3.1831	3.1786	3.1718	3.1616	3.1458	3.1203	3.0775	3.0103
Шарнір	$\omega_1^*$	0.9813	0.9841	0.9888	0.9955	1.0040	1.0144	1.0266	1.0404	1.0557	1.0719
	$\omega_2^*$	1.4342	2.0523	2.4745	2.7457	2.9243	3.0468	3.1343	3.1989	3.2479	3.2855
	$\omega_3^*$	3.7870	5.2739	5.8983	6.1806	5.8121	5.2521	4.8005	4.2602	3.8445	3.5265
Жорстке закріплення	$\omega_1^*$	1.1460	1.4067	1.5892	1.7029	1.7763	1.8271	1.8649	1.8951	1.9203	1.9422
	$\omega_2^*$	2.9214	3.9330	4.3545	4.5817	4.7258	4.8251	4.8018	4.3400	3.9900	3.7264
	$\omega_3^*$	5.7819	6.3668	6.3452	6.2838	6.0501	5.4192	4.9034	4.9534	4.9939	5.0242

Таблиця 4

Частоти вільних коливань порожнистого анізотропного циліндра довжиною  $L = 2$ 

		Відносна товщина $H/R$									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Вільний край	$\omega_1^*$	0.9612	0.9640	0.9682	0.9739	0.9813	0.9901	1.0002	1.0116	1.0238	1.0365
	$\omega_2^*$	0.9754	1.0000	1.0358	1.0772	1.1200	1.1616	1.2005	1.2362	1.2683	1.2972
	$\omega_3^*$	1.2653	1.6045	1.6047	1.6051	1.6055	1.6061	1.6070	1.6082	1.6098	1.6120
Шарнір	$\omega_1^*$	0.9813	0.9841	0.9888	0.9955	1.0040	1.0144	1.0266	1.0404	1.0557	1.0719
	$\omega_2^*$	1.0022	1.0916	1.1997	1.3038	1.3951	1.4722	1.5366	1.5905	1.6357	1.6737
	$\omega_3^*$	1.4361	2.0538	2.4760	2.7470	2.9256	3.0480	3.1354	3.1206	3.0787	3.0125
Жорстке закріплення	$\omega_1^*$	0.9882	1.0202	1.0611	1.1026	1.1407	1.1745	1.2046	1.2317	1.2565	1.2794
	$\omega_2^*$	1.2622	1.6721	1.9484	2.1216	2.2357	2.3161	2.3762	2.4232	2.4610	2.4919
	$\omega_3^*$	2.1103	2.9942	3.1871	3.1874	3.1853	3.1812	3.1744	3.1632	3.1442	3.1092

Таблиця 5

Частоти вільних коливань порожнистого анізотропного циліндра довжиною  $L = 3$ 

		Відносна товщина $H/R$									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Вільний край	$\omega_1^*$	0.7682	0.7683	0.7684	0.7685	0.7686	0.7686	0.7687	0.7687	0.7686	0.7685
	$\omega_2^*$	0.9664	0.9680	0.9705	0.9738	0.9776	0.9816	0.9857	0.9895	0.9929	0.9954
	$\omega_3^*$	0.9856	1.0052	1.0089	1.0144	1.0217	1.0308	1.0418	1.0547	1.0691	1.0846
Шарнір	$\omega_1^*$	0.9619	0.9680	0.9776	0.9902	1.0040	1.0144	1.0266	1.0404	1.0557	1.0719
	$\omega_2^*$	0.9813	0.9841	0.9888	0.9955	1.0050	1.0214	1.0387	1.0563	1.0739	1.0907
	$\omega_3^*$	1.0027	1.0923	1.2004	1.3044	1.3957	1.4728	1.5372	1.5911	1.6096	1.6115
Жорстке закріплення	$\omega_1^*$	0.9722	0.9782	0.9850	0.9937	1.0045	1.0169	1.0309	1.0462	1.0623	1.0789
	$\omega_2^*$	0.9905	1.0423	1.1077	1.1712	1.2265	1.2728	1.3112	1.3431	1.3698	1.3921
	$\omega_3^*$	1.0965	1.3329	1.5334	1.5966	1.6024	1.6057	1.6087	1.6119	1.6155	1.6196

**Висновки.** У цій роботі у межах моделі просторової лінійної теорії пружності досліджено вільні коливання анізотропних порожнистих циліндрів скінченної довжини. Апроксимацію узагальненого розв'язку отриманої слабкої варіаційної постановки задачі про вільні коливання побудовано за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів з розкладом у тригонометричний ряд за кутовою координатою. Також досліджено точність та збіжність отриманих наближених значень власних частот коливань анізотропних циліндрів на різних скінченно-елементних сітках та за різних умовах закріплення торців. Зазначимо, що запропонований ефективний числово-аналітичний підхід дає змогу досліджувати вільні коливання анізотропних порожнистих циліндрів скінченної довжини у широкому діапазоні зміни фізико-механічних та геометричних параметрів для різних граничних умов на торцях, а також неосесиметричні коливання циліндрів. Універсальність цього підходу відносно форм меридіонального перетину конструкцій дає змогу використовувати його для дослідження коливальних процесів довільних осесиметричних тіл складної геометрії. Треба також зазначити, що універсальність моделі просторової лінійної теорії пружності дає змогу також покласти розроблений підхід в основу математичного забезпечення сучасних САПР механіки.

1. Григоренко А.Я., Дьяк И.И. Решение пространственных задач о свободных колебаниях осесимметричных тел // Прикл. механика. – 1994. – Т. 30, № 5. – С. 19–24. 2. Huan W., Keith W. Guan

Wei A vibrational mode analysis of free finite-length thick cylinders using the finite element method // *Trans. ASME J. Vibr. and Acoust.*, 1998. – Vol. 120, № 2. – P. 371–377. 3. So Tinyong, Leisse A.W. Free vibrations of the thick hollow circular cylinders from 3-D analysis // *Trans. ASME J. Vibr. and Acoust.*, 1997. – Vol. 119, № 1. – P. 89–95. 4. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с. 5. Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Некоторые осесимметричные задачи статики и динамики анизотропных тел цилиндрической формы. К.: НАН Украины, Технический центр, 1998. – 60 с. 6. Heyliger P.R. Axisymmetric free vibrations of finite anisotropic cylinders // *J. of Sound and Vibration*. – 1991. – Vol. 148, № 3. – P. 507–520. 7. Григоренко А.Я., Дяк И.И., Макар В.М. Влияние анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров // *Прикл. механика*. – 2001. – Т. 37, № 5. – С. 74–83. 8. Луговой П.З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // *Прикл. Механика*. – 2001. – Т. 37, № 5. – С. 44–73. 9. Дууак И.И., Григоренко О.Я. and Макар В.М., Free vibration of finite composite cylinders // *Proceedings of 15-th IC on Computer Methods in Mechanics CMM-2003*. – Gliwice, Poland, 2003. – P. 45–48. 10. Grigorenko O., Makar V. Free vibrations of the thick hollow anisotropic cylinders // *Proceedings of the 8th IC “Modern Building Materials, Structures and Techniques”*. – Vilnius, Lithuania, May 19–21, 2004. – P. 347–348. 11. Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемого тела. – К.: ВИПОЛ, 1993. – 376 с. 12. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с. 13. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.

УДК 621.396.6:681.3

В.І. Каркульовський, І.І. Мотика, І.І. Чура  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра систем автоматизованого проектування

## МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ. ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ

© Каркульовський В.І., Мотика І.І., Чура І.І. 2007

**Розглянуто особливості застосування методу діакоптики при моделюванні складних механічних систем на етапі динамічного аналізу. Розроблена методика формування та розв’язування рівнянь, які описують динамічні процеси в складних механічних системах.**

**The application of diacoptic method while designing of the difficult mechanical systems on the stage of dynamic analysis are examined. The method of forming and solving of equalizations describing dynamic processes in the difficult mechanical systems is developed.**

**Вступ.** Аналізу механічних конструкцій ЕА, а особливо систем віброізоляції, присвячено багато робіт, але переважно вони орієнтовані на використання аналітичних методів та моделей (метод Лагранжа, рівняння Гамільтона), що ускладнює застосування їх в системах автоматизованого проектування, оскільки під час алгоритмізації процесу формування рівнянь важко вибрати узагальнені координати і обчислити роботи на віртуальних переміщеннях, врахувати особливості реальних конструкцій (похибки монтажу і розмірів, специфіка просторового навантаження). Крім того, використання традиційних методів ускладнює застосування еволюційного підходу до процесу проектування, який покладений в основу об’єктно-орієнтованого проектування (ООП), а також не дає змоги повною мірою реалізувати переваги об’єктно-орієнтованого проектування: використання виразних засобів об’єктно-орієнтованих мов програмування, підтримки повторного застосування окремих складових програмного забезпечення, створення більш відкритих систем.