1. Волочій Б., Шира А. Алгоритм імітаційної моделі для дослідження ефективності адаптивних процедур вибору повідомлень на обслуговування із сукупності БЗП у вузлах інформаційної мережі // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2001. – № 428. – С. 103 – 112. 2. Volochiy B., Podoljak U. Lokal Radio-Electronik Complex System Model Transformation Process Automation // The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics: Proceedings of the VI – th International Conference CADSM2001. – Lviv: Publishing House of Lwiw Polytechnik National University, 2001. – 314 p. (p. 64 – 65). 3. Volochiy B., Ulybin D. Improvements in the technology of discrete uninterrupted stochastic information systems modeling // Praci X Konferenciji "Sieci s Systemy Informatyczne". – Lodz, 2002. – S. 317 – 326. 4. Волочий Б.Ю. Адаптивное многоканальное сопряжение информационных каналов с устройствами обработки // Вестник Львовского политехнического института. – 1986. – № 206. – С. 41 – 44.

УДК 621. 391:621.372.632

Вадим Захарченко
Одеська національна академія зв'язку ім. О. Попова

КОЕФІЦІЄНТ ГРУПУВАННЯ В КАНАЛАХ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ТА ЗАЛЕЖНИМИ ПОМИЛКАМИ

Запропоновано модель нестаціонарного каналу зв'язку. Досліджено імовірності помилок блоків даних залежно від їх довжини, а також імовірності помилок даних для нестаціонарних каналів з врахуванням групування помилок.

Nonstationary channel model is proposed. Data blocks errors probability dependent of it length are investigated, so as data errors probability of nonstationary channels taking into account errors grouping.

1. Постановка задачі

Відомі експериментальні дані стосовно двійкового каналу зв'язку (ДКЗ) хоча й не є вичерпними, але дають змогу зробити певні якісні висновки щодо характеру помилок в них. Наприклад, встановлено, що здебільшого реальні канали є нестаціонарні [1]. Нестаціонарність каналів зумовлена наявністю детермінованої складової в процесах, котрі визначають закономірність виникнення помилок.

Враховуючи зміни параметрів ДКЗ, можна припустити, що можливі набори параметрів утворюють дискретну множину й можуть бути пронумеровані цифрами $\nu = 1; 2; ...; l$. Тоді загальну модель ДКЗ можна подати у вигляді l моделей, що розрізняються числовими значеннями параметрів і вмикаються до каналу певним випадковим комутатором процесу $\nu = F(\sigma)$. Якщо $\sigma = i$, то канал перебуває в i-му стані.

У більш загальному випадку складові моделі окремих станів можуть розрізнятись не лише параметрами, але й власне моделями окремих станів. У зв'язку з цим О.О. Амосовим та В.В. Колпаковим запроваджено поняття породжувального процесу, який визначає різновид моделі окремого стану [2]. Найпростіші моделі, в яких процес зміни станів описується як простий марківський процес, мають від двох до чотирьох станів. Зокрема для провідних каналів задовільною вважається модель із двома станами.

Найбільш універсальним рівнем розгляду впливу на корисний сигнал сукупності чинних завад у фізичному каналі є канал постійного струму (КПС). При цьому складний математичний опис неперервного каналу замінюється на більш простий опис КПС.

За параметри моделі КПС здебільшого використовуються параметри потоку помилок та крайових спотворень.

2. Параметри потоку помилок та крайових спотворень реального КПС

З метою визначення параметрів каналу постійного струму були проведені вимірювання на реальних каналах зв'язку телефонної мережі загального користування. При цьому використовувалась модель з частотною модуляцією за стандартом V. 21 зі швидкістю 600 Бод за $\Delta F = 700$ Гц. Приймання сигналів проводилось методом аналізу у середній точці [3]. На підставі експериментальних даних для кожної довжини блока n обчислювалось значення помилкового приймання елемента P_e, ймовірність появи помилкового блока $P(\geq 1,\ n)$, середня кількість помилкових елементів у помилково прийнятому блоці. У табл. 1 наведено частості появи i-кратних помилок для окремих довжин блоків.

Таблиця 1

n / N_i	2	4	8	9	16	30	60	120
1	0,53	0,285	.186	.245	.114	.09	.066	.066
2	0,47	0,384	.439	.427	.497	.384	.367	.331
3		0,192	.152	.162	.202	.158	.139	.163
4		0,138	.033	.024	.047	.102	.108	.114
5			.063	.04	.067	.124	.145	.151
6			.045	.028	.021	.017	.042	.036
7			.019	.024	.021	.017	.018	.018
8			.063	.008	0	.011	.012	.012
9				.043	.005	.023	.024	.018
10					.01	.006	.006	0,12
11					0	.011	.0,06	0,12
12					.016	.006	.006	.006
13						.011	.012	.012
14						.006	.006	.006
15						.011	.012	.012
16						.006	.006	.006
17						.006	.012	.012
18						.006	.006	.006
19						.006	.006	.006
P_e	$1{,}91\cdot10^{-3}$	$1{,}97\cdot10^{-3}$	$1{,}98\cdot10^{-3}$	$1{,}87\cdot10^{-3}$ $1{,}72\cdot10^{-3}$	$1{,}92\cdot10^{-3}$	$1{,}70\cdot10^{-3}$	$1{,}76\cdot10^{-3}$	$1{,}83\cdot10^{-3}$
$\bullet\,10^{-3}$ $P(\geq 1, n)$,	2,6	3,6	5,5	5,8	8,1	13	25	37
$\bar{t}$	1,47	2,184 2,184	2,874 2,874	2,664 2,664	3,915	2,845	4,211	5,3
α_1	0,555	0,563 0,563	0,508 0,508	0,446 0,446	0,401	0,377	0,351	0,355
α_2	0,555	0,563 0,563	0,508 0,508	0,446 0,446	0,377	0,401	0,351	0,357

При цьому зазначені в таблиці параметри розраховувалися так:

$P(\geq 1, n)$ – відношення кількості помилкових блоків $N_{\text{пом}}$ довжини n до переданих $N_{\text{пер}}$;

P_{e} – відношення кількості помилкових елементів до загальної кількості переданих;

$P_i(n)$ – відношення кількості помилкових блоків з i-кратними помилками до загальної кількості помилкових блоків $\left(\dfrac{N_{\text{пом}i}}{N_{\text{пом}}}\right)$.

Середнє значення помилкових елементів $(\bar{t})$ у спотвореній кодовій комбінації визначалось

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^{n} p_i(n) t_i\ , \tag{1}$$

де t_i – кратність помилок, які з'являються з імовірністю $P_i(n)$.

Коефіцієнт групування помилок визначався [1]

$$P(\geq 1, n) = n^{1-\alpha} p_{\text{e}}\ . \tag{2}$$

Аналіз табл. 1 дає змогу зробити висновки.

1. Зі збільшенням довжини блока ймовірність помилкового приймання зростає. Можна зазначити, що залежність $\left(\log(p \geq 1, n) = k \log n\right)$ логарифма ймовірності є лінійною функцією від логарифма довжини сигнальної конструкції [1].

2. Середнє значення кількості помилкових елементів в помилкових кодових словах зростає непропорційно до n.

3. Зі збільшенням довжини блока коефіцієнт групування α зменшується, що є предметом особливого аналізу, адже в літературі цей параметр є характеристикою каналу [1].

3. Коефіцієнт групування для каналів з незалежними помилками

З'ясуємо фізичний зміст параметра α, оскільки поданому в [1] поясненню цього явища бракує однозначності. Не надто переконливе є твердження про незалежність помилок за $\alpha = 0$, а припущення щодо зосередження помилок в одній групі за $\alpha = 1$ потребує додаткового з'ясування.

З урахуванням впроваджених вище позначень запишемо ймовірність помилкового приймання елемента коду

$$\mathrm{p_e} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \mathrm{t_i} \sum\limits_{k=0}^{1} \mathrm{p}(\mathrm{t_k}, \mathrm{n})}{\mathrm{n}}\ . \tag{3}$$

Використовуючи впроваджене вище значення $\bar{t}$:

$$\mathrm{p_e} = \frac{\bar{\mathrm{t}}\, \mathrm{p}(\geq 1; \mathrm{n})}{\mathrm{n}}\ . \tag{3а}$$

Якщо тепер в (3а) підставити вираз (2), то дістанемо рівність

$$\mathrm{P_e} = \frac{\bar{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{n}^{1-\alpha} \cdot \mathrm{p_e}}{\mathrm{n}}\ , \tag{4}$$

$$\mathrm{n}^{\alpha} = \bar{\mathrm{t}}$$

котра відбиває фізичну сутність α. З (4) випливає, що за $\alpha = 0$ кожна помилково прийнята кодова комбінація містить по одному помилковому кодовому елементу, а за $\alpha =1$ кожна помилкова кодова комбінація містить *n* помилок.

Визначимо, яким має бути коефіцієнт α за *n*, яке прямує до нескінченності, аби виконувалася рівність (4). Розв'язуючи (4) відносно α, маємо

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \bar{t}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \ln \frac{\bar{t}}{n}}{\ln n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{\bar{t}}{n}}{\ln n}. \tag{5}$$

Враховуючи, що чисельник дробу (5) з імовірністю 1 – обмежена величина значення другого додатку (5)

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\bar{t}}{n} \ln p_e \to 0, \tag{6}$$

дістаємо

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = 1.$$

Отже, величина α має залежати від *n*, і лише в цьому разі за кожного *n* виконується рівність (4).

Розглянемо гіпотезу щодо незалежності помилок за $\alpha = 0$. Беручи до уваги, що для каналу з незалежними помилками ймовірність відсутності помилки в кожному одиничному елементі є рівноймовірна, запишемо ймовірність появи в кодовій комбінації принаймні однієї помилки у вигляді

$$p(\geq 1; n) = 1 - (1 - p_e)^n. \tag{7}$$

Розв'язуючи (4) відносно $\bar{t}_{сп}$ з використанням (7), дістанемо

$$\bar{t} = \frac{n p_e}{1 - (1 - p_e)^n}. \tag{8}$$

Подамо (7) за допомогою біноміального ряду

$$p(\geq 1; n) = np_{пом} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k p_e^k,$$

для якого відношення наступного й попереднього членів ряду дорівнює

$$\frac{n - k + 1}{k} p_e.$$

Відомо, що даний ряд є абсолютно збіжним, оскільки $p_e < 1$. Якщо при цьому

$$p_e < \frac{k}{n - k + 1},$$

то знакозмінний ряд задовольняє умови теореми Лейбніца [4]. Для такого ряду

$$C_n^2 p_e^2 > \sum_{k=3}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k p_c^k,$$

і, отже,

$$n p_e > p(\geq 1; n), \bar{t} > 1 \quad \text{та} \quad \alpha > 0.$$

Припустимо, що, розпочинаючи з k й до k^1,

$$p_{\text{е}} = \frac{k^1}{n-k+1}, \tag{9}$$

де k^1 дорівнює цілій частині рівності:

$$k^1 = \left[\frac{(n+1)p_{\text{е}}}{1+p_{\text{е}}}\right].$$

Подамо суму ряду

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k p_{\text{е}}^k$$

у вигляді

$$1-np_{\text{е}}-(1-p_{\text{е}})^n.$$

У добуток $n\,p_{\text{е}}$ підставимо найменше значення $p_{\text{е}}$, визначене нерівністю (9),

$$\frac{nk}{n-k+1}.$$

Розпочинаючи з $k = 2$, це відношення є більше за одиницю. Зважаючи на нерівність (9), можна стверджувати, що

$$1-np_{\text{пом}}<0\ \text{, за } k \geq 2,$$

а отже, й вся сума

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k p_{\text{пом}} < 0. \tag{10}$$

З (10) випливає, що за

$$p_{\text{е}} \geq \frac{k}{n-k+1}$$

добуток $n\,p_{\text{е}}$ є більший за $p(\geq 1;n)$, а отже,

$$\bar{t}_{\text{сп}} > 1 \text{ та } \alpha > 0.$$

Отже, для каналів з незалежними помилками за кожної ймовірності $p_{\text{е}}$ та $n > 1$ умовна кратність помилки $\bar{t}$ більша за 1, а коефіцієнт групування є більшим за нуль. Тобто гіпотеза $\alpha = 0$ за незалежних помилок є хибною. Слід зазначити, що за $n\,p_{\text{пом}} << 1$ можна наближено вважати при $\alpha = 0$, $\bar{t} = 1$. За збільшення n чи $p_{\text{пом}}$ це наближення стає надто грубим.

У табл. 2 наведено обчислені значення $\bar{t}$ й α (чисельник і знаменник відповідно) для каналів з незалежними помилками за значень $p_e \in 10^{-1};..., 10^{-2}$.

З табл. 2 випливає, що коефіцієнт α є зростаючою функцією n. Особливо ця залежність виявляється за $p_{\text{е}} > 10^{-2}$.

Аналіз табл. 1 свідчить, що одержане значення у реальному каналі спочатку спадає, а за $n > 16$ не змінюється. Аби з'ясувати це питання, оцінимо параметри окремих станів каналу. З табл. 1 випливає, що кратність помилок за довжини кодового слова $n \geq 30$ не перевищує 20 помилок ($t_{\text{кр}} = 20$).

Таблиця 2

$P_е$	*n*					
	5	10	20	40	60	100
10^{-1}	1,221 /0,11	1,535 /0,18	2,277 /0,27	4,06 /0,37	8,002 /0,47	10 /0,5
10^{-2}	1,02 /0,01	1,046 0,019/0,019	1,098 /0,03	1,208 /0,05	1,448 /0,08	1,577 /0,097

Розглянемо умови передавання інформації блоками n = 60. Згідно з табл. 1, $p(\geq 1{,}60)$ = = 2,5 $\cdot 10^{-2}$ (2,5 % переданих комбінацій). Оскільки $p(t_{\text{сп}} > 19) = 0$, то тривалість поганого стану

$$\text{Т}_{\text{пс}} = \frac{19 N_{\text{пом}}}{N_{пер} \cdot 60} \approx 0{,}01\text{Т}_{\text{пер}}.$$

Якщо час поганого стану становить відсоток часу передавання $\text{Т}_{\text{пс}} \approx 20\text{t}_0$, то середня відстань поміж двома поганими станами каналу (інтервал доброго стану $\text{Т}_{\text{ДС}}$)

$$\text{Т}_{\text{дс}} = 60 : [1 - p(\geq 1{,}60)] \cdot 100 = 5850 \text{ елементів.}$$

Середня ймовірність помилки в поганому стані

$$p_{\text{е пс}} = \frac{\sum n_i}{N_{\text{пом}} \cdot 60} = 6 \cdot 10^{-2}.$$

З метою оцінювання каналу на інтервалі $\text{Т}_{\text{дс}}$ було сформовано таймерні сигнальні конструкції з базовим елементом $\Delta = 0{,}2\ t_0$ (s = 7) за тривалості слова $\text{Т}_{\text{сл}} = 6 \cdot t_0$ й постійній кількості ЗММ. У таких сигналах мінімальна відстань поміж словами визначається енергією сигналу не всього інтервалу t_0, а його частиною Δ [5].

При прийманні таких кодових слів реєстрація на прийманні відбувається в середній частині відрізків Δ [5].

При аналізі на прийманні враховувались помилкові сигнальні конструкції, в яких кількість переходів не змінювалась, а лише значущі моменти відтворення (ЗМВ) зсунулись за границі відповідної зони Δ. Ймовірність таких подій становила $p_{\text{зс}} = 9{,}7 \cdot 10^{-3}$ за загальної ймовірності помилкового приймання сигнальної таймерної конструкції $p_{\text{ПТ}} = 11{,}7 \cdot 10^{-3}$. Знаючи цю ймовірність, легко визначити величину середньоквадратичного відхилення

$$\sigma = 2\ \Delta t^{-1}\ (0{,}5 - p_{\text{зс}}) = 0{,}03\ t_0,$$

де t^{-1} – обернена функція Крампа [4].

4. Аналіз отриманих результатів

Визначимо ймовірність помилкового приймання таймерних кодових слів $p_{\text{пт}}$, переданих на інтервалі $\text{Т}_{\text{пс}}$. Оскільки довжина таймерних конструкцій $\text{Т}_{\text{т}} = 6t_0$, то за час $\text{Т}_{\text{пс}}$ приймається не більш за 3,3(20: 6 = 3,3) помилкових кодових слова. За інтервал доброго стану буде передано 5850: 6 = 915 кодових таймерних конструкцій. Тоді

$$P_{\text{пт}} = 3{,}3 : 975 = 3{,}38 \cdot 10^{-3}.$$

Отже, загальна обчислена ймовірність помилкового приймання таймерних сигнальних конструкцій на інтервалі $\text{Т} = \text{Т}_{\text{дс}} + \text{Т}_{\text{пс}}$ за наведених вище допущеннями становить $(9{,}7 \cdot 10^{-3} + +3{,}38 \cdot 10^{-3}) = 13{,}3 \cdot 10^{-3}$, що не надто відрізняється від виміряної $(11{,}7 \cdot 10^{-3})$.

Слід звернути увагу на те, що за розрядно-цифрового коду $p(\geq 1{,}60) = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$. Така близькість пояснюється тим, що частка часу поганого стану становить лише 2,5 % від загального, а на інтервалі доброго стану таймерних сигнальних конструкцій передається вдесятеро (60 : 6) більше, аніж 60-елементних слів за РЦК.

Здобуте значення σ дає змогу визначити величину $p_е$ в доброму стані через відношення сигнал/завада (h). Відомо [5], що для каналу з ЧМ $\sigma = \frac{1}{4h}$ – отже,

$$h = \frac{1}{4}\sigma = \frac{1}{0{,}12} = 8{,}3.$$

При такому значенні відношення сигнал/завада $p_{е\ дс} < 10^{-7}$ [3].

Проведений вище аналіз дозволяє з'ясувати причини зменшення коефіцієнта групування α за $n \le 6$, сталість його при $n>16$.

Оскільки довжина кодових слів ($n \in$ 30; 60; 120) є набагато меншою за інтервал $T_{дс}$ = 5850, а за час $T = T_{дс} + T_{пс}$ виникає в середньому один "спалах" поганого стану, то кількість помилкових елементів в сигнальних конструкціях завдовжки $n>16$ практично не змінюється. З іншого боку, при переході до кодових слів завдовжки більше за 16, кількість помилкових слів зменшується вдвічі. Це відбувається за рахунок тих "спалахів", котрі потрапляли на межі слів і спотворювали їх за меншої тривалості.

При збільшенні n все більша частина "спалахів" спотворює елементи в межах одного кодового слова, що збільшує частість більших кратностей, котрі, у свою чергу, збільшують $\bar{t}$. А оскільки на переважній частині часу передавання $p_е<10^{-7}$, то за зазначених значень n коефіцієнт групування (на інтервалі $T_{ДС}$) практично дорівнює нулю. При цьому загальний коефіцієнт групування визначається поганим станом й лишається незмінним.

Завищені значення α за $n<16$ зумовлюються тим, що на довжині кодового слова не вміщується реалізація одного поганого стану каналу ($nt_0<T_{пс}$). Терміни поганого стану перекривають декілька чи два суміжні кодові слова, спотворювання яких не характеризує їх загалом.

Висновки

1. У каналах з незалежними помилками коефіцієнт групування $\alpha>0$ і збільшується зі зростанням елементності кодового слова.

2. У реальних каналах зв'язку групування є наслідком великого значення $p_е \ge 10^{-2}$ на інтервалах "поганого" стану каналу, частка якого не перевищує декількох процентів. А оскільки на інтервалі "доброго" стану $p_е \le 10^{-7}$, то збільшення елементності кодових слів практично не змінює значення α.

1. Элементы теории передачи дискретной информации / Под ред. Л.П. Пуртова. – М.: Связь, 1972. – 23 с. 2. Амосов А.А., Колпаков В.В. О разложении двоичного канала связи на биномиальные компоненты / Мат-лы III конф. по теории передачи и кодированию информации. – Ташкент, 1967. 3. Шувалов В.П., Захарченко Н.В. и др. Передача дискретных сообщений. – М.: Радио и связь, 1990. – 462 с. 4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 831 с. 5. Захарченко В.Н. Синтез багатопозиційних часових кодів. – К.: Техніка, 1999. – 279 с.