УДК 621.396

Богдан Русин, Віталій Таянов, *Борис Капустій
Фізико-механічний інститут НАН України ім. Г.В. Карпенка
*Національний університет "Львівська політехніка"

ПРО ОСОБЛИВОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОЕФІЦІЄНТА НАДІЙНОСТІ РОЗПІЗНАВАННЯ ДЛЯ ОБ'ЄКТІВ З КЛАСУ R^3

Встановлено характер перших двох моментних функцій коефіцієнта надійності розпізнавання на інтервалі варіації кількості класів у базі даних від одиниці до нескінченності. Показано скінченність вибірки об'єктів з класу R^3, з якими може працювати система розпізнавання, та стаціонарність процесу, що обумовлюється коефіцієнтом надійності розпізнавання.

In this paper the character of two moment functions of recognition reliability coefficient, which has variation on quantity classes interval changing from one to infinity is determined. Finiteness of objects sample from R^3 class the recognition system can work with, the stationarity of process conditioned by recognition reliability coefficient are shown.

Вступ. Серед систем розпізнавання частину становлять системи підтримки прийняття рішень [4]. Вони будуються так, що в результаті спрацювання видають на вихід обмежений список можливих претендентів. При цьому розпізнані об'єкти мають знаходитися в цьому списку, але не обов'язково на перших місцях. Постає питання щодо оцінки надійності такого розпізнавання для кожного з типів об'єктів, що подаються на вхід системи. Це дасть змогу контролювати вплив спотворюючих факторів на роботу системи при проведенні різного роду тестувань.

Поняття класу може бути як дуже широким, так і зовсім вузьким. Все залежить від того, як сильно відрізняються об'єкти в межах класу, адже передбачається, що об'єкти в межах класу мають певну варіацію. Вибір поняття класу в конкретному випадку залежить від задачі, яка вирішується. Для більш ефективного опису потрібно, щоб реалізації класу між собою якнайменше корелювали. В іншому випадку деякі реалізації можуть являти собою при певних обмеженнях копії інших. З точки зору теорії множин поняття множини і класу є тотожні між собою. Всі теореми, леми та аксіоми теорії множин можуть бути застосовані і до класів.

Припустимо, що існують різні класи відображень об'єктів ω_i в двомірному просторі R^2 реально існуючих об'єктів в тримірному просторі R^3. Кожний об'єкт в просторі R^3 подається класом відображень того самого об'єкта в просторі R^2. Це відбувається за рахунок того, що кожний об'єкт з простору R^3 проектується в простір R^2 під різними ракурсами, а також проектуються різні стани цього об'єкта. Далі будемо розглядати замкнений простір, в якому може міститись довільна кількість об'єктів. Розміри класів об'єктів, що проектуються у простір векторів ознак, можуть бути лише скінченно малими величинами. Тоді у випадку замкненої області, що обмежує всі проекції класів у просторі векторів ознак, при певній кількості цих проекцій, вони можуть перекриватись. Будемо розглядати такі системи розпізнавання, які формують ознаки і проекції класів у простір векторів ознак саме вказаним вище чином. Приклади таких систем були розглянуті в [8].

База MB, за якою проводиться пошук, містить набори об'єктів кожного класу: $MB = \bigcup_i MO_i$, де MO_i-деякі вибірки з i-го класу, тобто $MO_i \subset \omega_i$ Будемо вважати, що розміри подання всіх класів у базі даних, є однакові. При тестуванні ми чітко знаємо приналежність об'єктів до класів. Подавши на вхід системи об'єкт O_k , оцінюємо кількість об'єктів k-го класу, які система видала на виході у заданому довірчому інтервалі I_t розміром t.

Для числової оцінки надійності розпізнавання є відповідний коефіцієнт. Коефіцієнт надійності розпізнавання визначає потенційні можливості алгоритму системи розпізнавання. Чим більший цей коефіцієнт, тим вища ймовірність правильного розпізнавання об'єктів.

Для обчислення коефіцієнта надійності розпізнавання кожному положенню в списку можливих претендентів необхідно поставити у відповідність певну вагу. Тоді надійність роботи системи буде визначатися числом, що отримується як сума всіх ваг для тих положень списку, на які система поставила правильні об'єкти з бази. У загальному випадку ваги мають враховувати розмір списку можливих претендентів та кількість реалізацій об'єкта у базі. За умови, що кількість реалізацій кожного об'єкта в базі є однаковою, розмір списку можливих претендентів визначається кількістю реалізацій об'єкта, що наведені у базі. При цьому надійність роботи системи можна оцінювати не за окремими положеннями, а розбивши довірчий інтервал I_t на набір підінтервалів з однаковою вагою, проводити оцінку за цими підінтервалами.

Коефіцієнт надійності розпізнавання має такі властивості:

1. Коефіцієнт надійності розпізнавання дорівнює одиниці тоді, коли всі базові об'єкти, що відповідають вхідному, розташуються на перших місцях списку або потраплять у заданий довірчий інтервал I_t.

2. Коефіцієнт надійності розпізнавання дорівнює нулю тоді, коли у заданий довірчий інтервал I_t не потрапить жодний з правильно ідентифікованих базових об'єктів.

Отже, коефіцієнт надійності розпізнавання знаходиться в межах [0; 1]. При цьому об'єкт буде вважатися розпізнаним, коли коефіцієнт надійності розпізнавання буде лежати в межах (0; 1].

Закон зміни значення ваг можна вибрати будь-який, виходячи з потреб користувача та умов задачі, яка вирішується.

Подаючи на вхід системи розпізнавання об'єкти, ми отримаємо відповідне сімейство випадкових величин Kr_n, яке буде являти собою стохастичний процес. Стохастичний процес Kr_n одержується так. На вхід системи розпізнавання подається по одному об'єкту кожного класу, що наведені у базі даних. Об'єкти, що подаються на вхід, виключаються з бази даних. Всі об'єкти, що подаються на вхід системи розпізнавання, знаходяться в однакових умовах. Далі реєструється значення коефіцієнта надійності розпізнавання. Якщо кількість класів у базі даних n, то Kr_n являє собою дискретний випадковий процес з кількістю дискретних відліків, що дорівнює n.

На відміну від теорії виявлення цілей у радіолокації, де випадкова величина може мати лише два стани [1], використання вказаного вище критерію дасть можливість отримати випадкову величину, яка матиме не два стани, а достатньо велику їх кількість. Це дасть змогу уникнути невизначеності при порівнянні надійності роботи різних систем розпізнавання. Як і будь-який випадковий процес, сімейство випадкових величин Kr_n, обумовлене критерієм оцінки надійності розпізнавання [4], буде характеризуватися моментними функціями.

Постановка задачі. Потрібно встановити характер процесу Kr_n, обумовленого критерієм [4], а також визначити значення перших двох моментних функцій цього процесу при $n=1$ та $n=\infty$ і допустиме значення кількості класів зображень у базі даних, при якому надійність розпізнавання буде не меншою від заданого скінченного значення.

Розв'язання задачі. Розв'язання сформульованих задач досягається доведенням трьох теорем, а характер випадкового процесу визначається шляхом верифікації різних видів випадкових процесів щодо відповідності особливостям роботи систем розпізнавання. Отже, встановлюється той вид випадкового процесу, який повністю задовольняє умови розгляданих у даній роботі класів систем розпізнавання.

Теорема 1. Значення першої моментної функції $\mathrm{M}Kr_n$ сімейства випадкових величин Kr_n дорівнює 1, якщо існує лише один клас об'єктів. Перша моментна функція, а відповідно і ймовірність розпізнавання об'єктів прямує до 0, якщо кількість класів прямує до ∞.

Інакше дану теорему можна навести у вигляді:

$$\mathrm{M}Kr_1 = 1;$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}Kr_n = 0.$$

Доведення. Середнє сімейства випадкових величин Kr_n для дискретного розподілу може бути записане у вигляді:

$$\mathrm{M}Kr_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Kr_i ,$$

де Kr_i – значення коефіцієнта надійності розпізнавання.

Якщо ввести поняття вектора ознак x, де $x = (x_1,\ x_2,...,\ \ x_n)^T$, то елементи вектора відстаней $d_j^{\,k}$ між вхідним об'єктом класу k (O_k) і об'єктами, що наведені у базі даних, обчислюються так:

$$d_j^{\,k} = (\sum_{i=1}^{N} (x_i^{\,k} - x_i^{\,j})^2)^{\frac{1}{2}}, \forall\ \ k \in [1,\infty)\ \text{ і }\ j = 1, n\times s ,$$

де N – розмір вектора ознак; j – номер об'єкта в базі даних; $n\times s$ – розмір бази за умови, що розміри s всіх класів об'єктів у базі даних дорівнюють один одному.

Розмір вектора відстаней d^k буде дорівнювати $n\times s$. Позначимо через d_s вектор відстаней між об'єктом, що подається на вхід системи, та об'єктами того самого класу. Отже, d_s – вектор внутрішньокласових відстаней.

Будемо вважати, що на як завгодно малому відрізку інтервалу $\sup\limits_{k\in[1;\infty), i\in[1;ns]} (d_i^{\,k}) - \inf\limits_{k\in[1;\infty), i\in[1;ns]} (d_i^{\,k})$ існує ненульова ймовірність відстані $d_i^{\,k}$. Позначимо через d^a середнє значення відстаней між елементами у векторі d^k, яке може бути визначене при зробленому припущенні за такою формулою:

$$d^a = \frac{\sup\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns]}(d_i{}^k) - \inf\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns]}(d_i{}^k)}{n\cdot s-1}.$$

Зазначимо, що $\sup\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns]}(d_i{}^k)$ є величиною, обмеженою зверху, тобто $\sup\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns]}(d_i{}^k)<\infty$. Це випливає з того, що довільна кількість класів потрапляє у замкнену область у просторі R^2 і за цих умов вектор ознак є фінітним. А це в свою чергу призводить до того, що елемент з максимальним значенням у векторі d^k буде величиною, обмеженою зверху. Відповідно й величина $\inf\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns]}(d_i{}^k)$ є обмеженою зверху, бо $\sup\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns]}(d_i{}^k) > \inf\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns]}(d_i{}^k)$. Величини $\sup\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns]}(d_i{}^k)$ та $\inf\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns]}(d_i{}^k)$ є обмеженими знизу, тобто $\inf\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns]}(d_i{}^k)\geq 0$.

Знайдемо границю $d_n{}^a$, коли $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} d_n{}^a = \frac{\sup\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns)}(d_i{}^k) - \inf\limits_{k\in[1;\infty),i\in[1;ns)}(d_i{}^k)}{n\cdot s-1} = 0. \quad (1)$$

Необхідною умовою того, що об’єкт взагалі буде розпізнаватися, є відмінність від 0 середньої міжкласової відстані за вектором ознак. Можна бачити, що у випадку границі (1) міжкласова відстань також дорівнює 0. Це означає, що в цьому випадку система розпізнавання буде непрацездатною з імовірністю, що дорівнює 1. Далі буде показано, що дана ймовірність має монотонну збіжність до 1 при $n\to\infty$.

У тому випадку, коли при $Kr_i>0$ розпізнавання відбулося, а при $Kr_i=0$ – не відбулося, математичне очікування коефіцієнта надійності розпізнавання є тотожне ймовірності розпізнавання. Якщо ймовірність здійснення події A_i дорівнює $P(A_i)$, а ймовірність здійснення події A_∞ дорівнює нулю, то за лемою Бореля-Кантелі [5] $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)<\infty$ для різних класів i. Будемо вважати, що подія A_i здійснюється за умови $Kr_i>0$. Тоді під ймовірністю $P(A_i)$ слід розуміти ймовірність $P(Kr_i>0)$. Тому що $\lim\limits_{n\to\infty} d_n{}^a=0$, то при $n=\infty$ об’єкти взагалі не будуть розпізнаватися, тобто ймовірність розпізнавання буде дорівнювати нулю. Іншими словами, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(Kr_i>0)<\infty$ і $\mathrm{M}Kr_\infty=0$.

Що стосується другого випадку, коли $n=1$, то за означенням довірчий інтервал, що нас цікавить, буде завжди містити повну множину об’єктів і при цьому $\mathrm{M}Kr_1=1$.

Теорема доведена.

Слід зазначити, що точне значення першої моментної функції для даного значення n досягається при усередненні ансамбля нескінченної кількості реалізацій випадкового процесу Kr_n. Це означає, що для даного значення n потрібно розрахувати середні значення для нескінченної кількості наборів об'єктів у базі даних. Після цього треба усереднити ці значення і тільки в цьому випадку ми одержимо точне значення середнього для даного n. Отже, в даній роботі $\mathrm{M}Kr_n$ – точне значення першої моментної функції для даного n. Якщо кількість наборів є скінченною, то в цьому випадку можна казати про оцінку математичного сподівання. Аналогічні зауваження робляться і стосовно дисперсії [3].

Теорема 2. Значення другої центральної моментної функції сімейства випадкових величин Kr_n дорівнює 0, якщо кількість класів дорівнює 1 та прямує до 0, якщо кількість класів прямує до ∞.

Інакше:

$$\mathrm{D}Kr_1 = 0;$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}Kr_n = 0.$$

Доведення. Дисперсія сімейства випадкових величин Kr_n може бути записана у вигляді:

$$\mathrm{D}Kr_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Kr_i - \mathrm{M}Kr_n)^2 .$$

Потрібно зазначити, що $\left|Kr_i - \mathrm{M}Kr_n\right| < 1$, а будучи піднесеною до квадрату, ця різниця стає ще меншою. Покажемо, що починаючи з деякого $m < \infty$ з імовірністю $P > \varepsilon$, де ε як завгодно близьке до 1 число, ряд $\frac{1}{n-m+1}\sum_{i=m}^{n}Kr_i$ є мажоруючим по відношенню до ряду $\frac{1}{n-m}\sum_{i=m}^{n}(Kr_i - \mathrm{M}Kr_n)^2 \ \forall\ n\to\infty$. Дійсно, як випливає з першої теореми, завжди можна вибрати таке значення n, щоб $\mathrm{M}Kr_n$ було як завгодно малим. Якщо $Kr_i \le \mathrm{M}Kr_n$, то $(Kr_i - \mathrm{M}Kr_n)^2 < \mathrm{M}Kr_n$, оскільки знизу кожне Kr_i обмежене нулем. Розглянемо другий випадок, коли $Kr_i \ge \mathrm{M}Kr_n$. Розв'язавши нерівність $(Kr_i - \mathrm{M}Kr_n)^2 > \mathrm{M}Kr_n$, одержимо $Kr_i > \mathrm{M}Kr_n + \sqrt{\mathrm{M}Kr_n}$. Для $\mathrm{M}Kr_n$, достатньо близьких до нуля, $\sqrt{\mathrm{M}Kr_n} >> \mathrm{M}Kr_n$. Якщо знехтувати значенням $\mathrm{M}Kr_n$, то отримаємо $Kr_i > \sqrt{\mathrm{M}Kr_n}$ або $Kr_i >> \mathrm{M}Kr_n$. Імовірність такого випадку є малою. Тому $P(\exists Kr_n : \left|Kr_i - \mathrm{M}Kr_n\right|^2 > \mathrm{M}Kr_n) \to 0 \ \forall\ n\to\infty$. Також можна відкинути скінченне значення $\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}Kr_i, m<\infty$, яке не впливає на збіжність ряду. Якщо при цьому ряд $\mathrm{M}Kr_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Kr_i$ збігається до нуля, то і ряд $\mathrm{D}Kr_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Kr_i - \mathrm{M}Kr_n)^2$ також буде збігатися до нуля при $n\to\infty$.

Для $n=1$ закон розподілу вироджується в константу і буде являти собою функцію Дірака, тому за означенням $\mathrm{D}Kr_1 = 0$.

Теорема доведена.

Теорема 3. Існує таке скінченне число класів об’єктів у базі даних, при якому ймовірність того, що об’єкти будуть розпізнаватись, не перевищуватиме наперед заданого, як завгодно малого значення.

Доведення. Сформульоване твердження зводиться до того, що потрібно показати збіжність до 1 ймовірності існування такого довірчого інтервалу I_t, ($t \geq s$), в якому не буде міститися правильних об’єктів. Правильними будемо називати об’єкти бази даних, які відповідають зображенню, що подається на вхід системи розпізнавання, тобто належать до одного класу.

Для доведення теореми потрібно показати можливість заміщення правильного об’єкта з імовірністю P, як завгодно близькою до 1, неправильними об’єктами. Правильний об’єкт характеризується мінімальною відстанню до вхідного об’єкта.

Розглянемо системи розпізнавання, для яких виконується умова $1-P(\inf(d_s{}^k) < \inf(d_{n\cdot s}{}^k \backslash d_s{}^k)) > 0, \forall n > 1 \wedge \forall s \in [1;t], t << n\cdot s$. Це, власне, ті системи розпізнавання, які ми тут розглядаємо. Для них характерна неоднозначність спрацювання. Зміст цього виразу полягає у тому, що ймовірність правильного спрацювання для довільної системи розпізнавання має скінченне наближення до одиниці. Розподіл правильних об’єктів в межах довірчого інтервалу для кожного класу об’єктів є різний. Тому при збільшенні вибірки $n\times s$ можна розглядати наступні ймовірності: ймовірність заміщення правильного об’єкта, що знаходиться на першому місці в межах довірчого інтервалу неправильним; ймовірність попадання даного правильного об’єкта або групи правильних об’єктів за межі довірчого інтервалу; ймовірність попадання всіх правильних об’єктів за межі довірчого інтервалу. Другий вид ймовірностей може бути використаний для моделювання характеру зміни коефіцієнта надійності розпізнавання Kr_n.

Допустимо, що з достатньою точністю визначена ймовірність заміщення правильного об’єкта неправильним P. У випадку незалежності об’єктів у базі даних та розміру бази даних $n\times s$, ймовірність правильного спрацювання системи розпізнавання дорівнюватиме $(1-P)^{(n-1)s}, \forall n \geq 1$. Переходячи до границі, отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty}(1-P)^{(n-1)s} = 0$. Якщо ймовірність P визначена для першого правильного об’єкта, то вона є більшою ніж у випадку всіх решта правильних об’єктів. Тоді, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}(1-P)^{(n-1)s} = 0$ для першого правильного обєкта, то для всіх решта правильних об’єктів ми отримаємо такий самий результат. Отже, якщо база буде містити нескінченну кількість об’єктів, то розпізнавання не відбудеться. Вибірка дозволяє визначити початкову ймовірність P, на основі якої оцінюється ймовірність $(1-P)^{(n-1)s}$. На перший погляд може здатися, що для визначення початкової ймовірності P достатньо навіть невеликої вибірки $n\times s$. Однак потрібно зазначити, що при більших значеннях $n\times s$ точніше буде визначене значення ймовірності $(1-P)^{(n-1)s}$.

Будемо вважати, що система розпізнавання вже не працездатна, коли при $n\times s$ об’єктах у базі даних імовірність розпізнавання буде меншою від заданого граничного значення ε. Оскільки збіжність за ймовірністю $(1-P)^{(n-1)s}$ має монотонний характер, то навіть для дуже близьких до 0 значень ε, число об’єктів у базі даних $n\times s$ буде являти собою скінченну величину. Отже, при розв’язанні сформульованої вище задачі можна лише оцінювати ймовірність, з якою об’єкти не розпізнаються при заданому значенні $n\times s$, або вирішувати обернену задачу – знаходити значення $n \times s$, яке відповідає певному значенню ймовірності.

Теорема доведена.

Далі з'ясуємо характер випадкового процесу, який являє собою сімейство випадкових величин Kr_n, а саме – стаціонарним чи нестаціонарним він є. Якщо здійснювати неперервну заміну об'єктів бази іншими об'єктами, то математичне очікування та дисперсія реалізацій випадкового процесу Kr_n для даного n будуть сталими величинами, а кореляційна функція процесу Kr_n буде залежати лише від величини зсуву. Отже, процес буде стаціонарним у широкому сенсі.

З іншого боку, значення моментних функцій будуть залежати від кількості класів об'єктів у базі даних. Ці залежності обумовлюються особливістю процесу розпізнавання, яка полягає в тому, що при збільшенні кількості класів у базі даних надійність розпізнавання знижується. Тому аналізувати випадковий процес Kr_n на основі його реалізацій можна лише при однакових значеннях n для всіх реалізацій. Потрібно зазначити, що зміна першої моментної функції проходить монотонно-випадковим чином, тобто детермінований характер її зміни може бути описаний у вигляді: $1 \to 0$. Це означає, що на монотонну залежність першої моментної функції від n накладається випадковий процес. Можна розглядати різні моделі такого накладання, які відповідають різним умовам. Найпростішою моделлю буде адитивна суміш монотонної функції з випадковим процесом. Що стосується другої центральної моментної функції, то детермінований характер її зміни можна записати так: $0 \to \max \to 0$. Тобто ця функція має дві ділянки, де веде себе монотонно. На другу центральну моментну функцію також накладається свій випадковий процес. Можна також розглядати різні моделі накладання. В принципі як для першої, так і для другої моментної функції можна вибрати такий крок зміни n, що інтерполююча крива одержаних дискретних точок на певних інтервалах буде мати суто монотонний характер.

Випадкова складова значень першої і другої моментної функції для даного значення n обумовлюється, власне, скінченним значенням кількості наборів у базі даних. Це фактично оцінки математичного сподівання і дисперсії, які, як правило, мають стохастичний характер і деяку похибку [3].

Збільшення статистики не призводить до більш точного визначення статистичних параметрів. Тому в даному випадку можна казати лише про надійність тієї чи іншої системи розпізнавання, яка працює з визначеною кількістю класів об'єктів n. У даному випадку n може бути тестовим числом, відносно якого визначається надійність роботи певної групи систем розпізнавання.

Різноманітні параметри систем зручно описувати за допомогою моментних функцій [2,7,9]. Система розпізнавання А буде вважатися такою, що має вищу якість роботи від системи В, коли на заданому наборі класів об'єктів n виконуються такі умови:

1) $\mathrm{M}Kr_A > \mathrm{M}Kr_B$;
2) $\mathrm{M}Kr_A = \mathrm{M}Kr_B \wedge \mathrm{D}Kr_A < \mathrm{D}Kr_B$.

Якщо значення першого і другого моментів або моментних функцій в даній точці збігаються, то системи є рівноцінні при даних умовах.

Отже, якість системи розпізнавання буде повністю визначатися значеннями моментних функцій процесу Kr_n для заданого набору класів об'єктів n.

Висновки. У даній роботі отримано такі результати:

1. Доведено три теореми:

• у першій теоремі доведено, що значення першої моментної функції MKr_n сімейства випадкових величин Kr_n дорівнює 1, якщо існує лише один клас об'єктів. Перша моментна функція, а відповідно й імовірність розпізнавання об'єктів прямує до 0, якщо кількість класів прямує до ∞;

• у другій теоремі доведено, що значення другої центральної моментної функції сімейства випадкових величин Kr_n дорівнює 0, якщо кількість класів дорівнює 1 або прямує до 0, якщо кількість класів прямує до ∞;

• у третій теоремі доведено існування скінченного числа класів об'єктів у базі даних, при якому ймовірність того, що об'єкти будуть розпізнаватися, не перевищує наперед заданого як завгодно малого значення.

2. Встановлено стаціонарність у широкому сенсі випадкового процесу Kr_n.

3. Запропоновано новий спосіб порівняння систем розпізнавання, при якому якість систем розпізнавання буде повністю визначатися значеннями двох перших моментних функцій процесу Kr_n для заданого набору класів об'єктів.

1. Бакут П.А., Жулина Ю.В., Иванчук Н.А. Обнаружение движущихся объектов / Под ред. П.А. Бакута. – М.: Сов. Радио, 1980. – 288 с. 2. Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. – Л., Гидрометеоиздат, 1987. – 320 с. 3. Заболотний О.В., Михайлишин В.Ю. Залежність якості оцінок найменших квадратів імовірнісних характеристик поліритмічного сигналу від точності задання частот // Матеріали XVII відкритої наук.-техн. конф. молодих науковців і спеціалістів "Діагностичні системи та сигнали", 15 – 17 травня 2002 р. – С. 107 – 110. 4. Капшій О.В., Русин Б.П., Таянов В.А. Критерій оцінки якості розпізнавання системою підтримки прийняття рішення // Электроника и связь. – 2001.– № 15. – С. 89 – 93. 5. Карлин С. Основы теории случайных процессов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. 6. Королюк В.С., Петренко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. В.С. Королюка. – К.: Наукова думка, 1978. 7. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. 8. Таянов В.А.Оптимізація вибору ознак у системах розпізнавання, побудованих на основі ортогональних перетворень // Матеріали XVII відкритої наук.-техн. конф. молодих науковців і спеціалістів "Діагностичні системи та сигнали", 15 – 17 травня 2002 р. – С. 175 – 178. 9. Gardner W.A. Statistical Spectral Analysis : A Non Probabilistic Theory.- Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J. – 1986. – 635.