УДК 621.391.25

Юрій Романишин, Володимир Павлиш, Володимир Гудим, Ігор Данчишин
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра електронних засобів інформаційно-комп'ютерних технологій

ОСОБЛИВОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ ПРЯМОГО ТА ОБЕРНЕНОГО НЕПЕРЕРВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Розглянуто особливості числової реалізації прямого неперервного вейвлет-перетворення (НВП) в пакетах прикладних програм Wavelet Toolbox (*cwt*) та WaveLab (*rwt*) в часовій та спектральній області та взаємозв'язок між результатами цих перетворень та формальним означенням НВП. Наведені результати порівняння обчислювальних затрат при цих способах обчислення НВП. На основі алгоритму *cwt* побудовані процедури обчислення прямого НВП при довільній вейвлет-функції та оберненого НВП.

The peculiarities of numerical realization of direct continuous wavelet transform (CWT) in Wavelet Toolbox (*cwt*) and WaveLab (*rwt*) software in time and spectrum field and connection between the results of these transforms and the formal definition of CWT are considered. The comparison results of calculating expenditures by these methods of CWT calculation are adduced. On the basis of *cwt* algorithm the procedures of direct CWT calculation by arbitrary wavelet function and of inverse CWT are constructed.

Вступ. Обчислення неперервного вейвлет-перетворення може бути реалізоване різними програмними засобами. При наявності аналітичних виразів для сигналу та вейвлет-функції в окремих випадках можливе отримання НВП в аналітичному вигляді за допомогою пакетів прикладних програм (ППП) символьної математики, наприклад, Maple або Mathematica. Однак зазвичай сигнал заданий числовими відліками, що обумовлює необхідність числового отримання НВП.

Пряме НВП сигналу $s(t)$ з вейвлет-функцією $\psi(t)$ подано у вигляді:

$$\mathrm{cwt}[s(t);\psi(t),a,b]=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \tag{1}$$

де b та a – зміщення та масштаб вейвлет-функції.

При числовій реалізації НВП як аргумент t, так і параметри a та b набувають дискретних значень, що обумовлює різні можливості обчислень. Крім того, НВП може бути наведено через спектральні характеристики [1]:

$$\mathrm{cwt}[s(t);\psi(t),a,b]=\mathrm{sign}(a)\sqrt{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} S(jf)F^*(jaf)e^{j2\pi fb}df, \tag{2}$$

де $S(jf)$ – перетворення Фур'є сигналу $s(t)$; $F^*(jf)$ – комплексно-спряжена величина до перетворення Фур'є вейвлет-функції $\psi(t)$.

Відповідно до цього пряме НВП числово може бути реалізоване або в часовій області як задача обчислення кореляційних функцій, або в спектральній області. Обидва ці варіанти використовуються в ППП вейвлет-аналізу, зокрема, обчислення в часовій області реалізоване в ППП Wavelet Toolbox [2] системи MATLAB (функція *cwt* – continuous wavelet transform), а в спектральній області – в ППП WaveLab [3] (функція *rwt* – real wavelet transform). Однак при використанні цих програм результати їх роботи повинні бути приведені у відповідність означенням (1) та (2). Крім того, для вказаних ППП необхідно як вейвлет-функції використовувати лише допустимі в них відомі функції, а безпосереднє використання власних вейвлет-функцій неможливе. Функції обчислення оберненого НВП в цих ППП теж відсутні. Додаткова функція *icwt* (inverse continuous wavelet transform), описана в [4], допускає лише використання таких вейвлет-функцій, для яких існують відповідні масштабуючі функції, тобто ортогональних вейвлет-функцій.

Нижче наведений аналіз особливостей обчислення прямого НВП в часовій та частотній області, відповідність результатів обчислень означенню НВП, проведено порівняння обчислювальних затрат для обох варіантів обчислень, побудовані процедури обчислення прямого НВП для довільних вейвлет-функцій та оберненого НВП.

Обчислення прямого НВП в часовій області. При числовій реалізації прямого НВП в часовій області функцією *cwt* досліджуваний сигнал $s(t)$, що заданий на часовому відрізку $[t_1; t_2]$ та може бути продовжений на всю дійсну вісь з $s(t) = 0$ при $t \notin [t_1; t_2]$, наводиться вектором рівновіддалених значень $s[i]$; $i = \overline{1, m}$, причому вважається, що крок відліків цього сигналу в часі становить 1 (сек), у зв'язку з чим такий самий крок повинні мати зміщення масштабованої вейвлет-функції. На відрізку дискретизації значення сигналу $s[i]$ вважається постійним, в результаті чого при числовій реалізації прямого перетворення в часовій області інтеграл по всій осі часу наводиться сумою інтегралів по дискретних відрізках, які відповідають кроку дискретизації сигналу $s(t)$:

$$cwt[s(t); \psi(t), a, b] = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} s(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \approx \frac{1}{\sqrt{|a|}} \sum_i s[i] \int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \sum_i s[i] \left(\int_{-\infty}^{t_{i+1}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt - \int_{-\infty}^{t_i} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \right) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \sum_i s[i](I([i+1], a, b) - I([i], a, b)). \qquad (3)$$

З метою підвищення швидкодії обчислення інтегралів їх значення $I[i] = \int_{-\infty}^{t_i} \psi(t) dt$ табулюються відповідно до заданої точності дискретизації на відрізку $[t_3; t_4]$, який визначається ефективною областю визначення вейвлет-функції (область, поза межами якої значення функції близьке до нуля). При цьому задається кількість дискретних значень на цьому відрізку: $k = 2^N$.

Обчислення НВП здійснюється для значень масштабних коефіцієнтів, заданих вектором $a[j]$; $j = \overline{1, n}$. Значення зміщення утворюють масив $b[i]$; $i = \overline{1, m}$ з кроком 1. Очевидно, що для обчислення виразу (3) необхідно поставити у відповідність дискретним відлікам сигналу $s[i]$ на часовій осі індекси в масиві табульованих значень інтегралів вейвлет-функції, що відповідають заданому масштабу. Цей масив індексів, узгоджених з кроком дискретизації сигналу, визначається співвідношенням:

$$r[q]=1+\left[\frac{\overline{0,[a\cdot(t_4-t_3)]}}{a\cdot\Delta t_2}\right], \quad (4)$$

де $\Delta t_2=(t_4-t_3)/(k-1)$; $q=\overline{1,n_2}$; $n_2=\left[\frac{a\cdot(t_4-t_3)}{\Delta t_1}\right]+1$; $\Delta t_1=(t_2-t_1)/(m-1)$; [ ] означає цілу частину числа.

У результаті, з врахуванням дискретності значень $s(t)$, b та a, перетворення (1) представляється у вигляді:

$$cwt[j;p]=\sqrt{|a[j]|}\sum_i s[i]z[i-p]; \quad j=\overline{1,n}, \quad (5)$$

де $z[u]$; $u=\overline{1:n_2}$ – різниця двох сусідніх вибірок табульованих значень інтегралу вейвлет-функції; p – зміщення вейвлет-функції.

З метою використання стандартної процедури дискретної згортки обчислення дискретної кореляції замінюється згорткою:

$$\sum_i s[i]z[i-p]=\sum_i s[i]y[n_2+p+1-i], \quad (6)$$

де $y[u]=z[n_2+1-u]$; $u=\overline{1,n_2}$.

При кількості дискретів сигналу m та вибірок табульованого інтегралу n_2 кількість значень дискретної згортки дорівнює $m+n_2-1$. З метою виділення однакових діапазонів індексів зміщення при кожному масштабі з масиву згортки виділяється масив розміром *m* в області центральних індексів згортки. Отже, формується прямокутна матриця дискретних значень $cwt[n\times m]$.

Якщо нормований крок сигналу $s(t)$ відмінний від 1 та дорівнює Δt, необхідно привести результати обчислень за процедурою *cwt* у відповідність означенню НВП (1). Як випливає з наведеної процедури обчислень, ця відповідність визначається такими співвідношеннями:

$$a_{def}=a_{cwt}\cdot\Delta t; \quad cwt_{def}=cwt_{cwt}\cdot\sqrt{\Delta t}, \quad (7)$$

де індекси def та cwt відповідають означенню (1) та результатам, отриманим за допомогою програми *cwt*.

Крім того, навіть при $\Delta t=1$ значенню $b_{def}=0$ відповідає зміщення $b_{cwt}=(a\cdot t_3-t_1)+\left[\frac{n_2}{2}\right]+1$.

Обчислення прямого НВП в частотній області. При обчисленні прямого НВП в частотній області на основі співвідношення (2) з використанням модифікованої функції *rwt* діапазон значень масштабних коефіцієнтів ділиться на октави так, що масштаби сусідніх октав a_i та a_{i+1} зв'язані співвідношенням: $a_{i+1}/a_i=2$. Крім того, кожна октава поділяється на підоктави: $a_{i,j}=a_i\cdot 2^{j/k}$; $j=\overline{1,k}$, де k – кількість підоктав.

Інтегральне перетворення Фур'є $S(jf)$ сигналу обчислюється за дискретним перетворенням Фур'є дискретизованого сигналу $s[i]$; $i=\overline{1,m}$. При $m=2^L$ використовується алгоритм швидкого перетворення Фур'є (ШПФ):

$$S(jf)[i] = fft(s[i]) \cdot \Delta t_1; \quad i = \overline{1, m}, \tag{8}$$

де $fft(s[i])$ – ШПФ сигналу $s[i]$; Δt_1 – крок дискретизації сигналу.

Спектральна густина вейвлет-функції $F(jaf)$ або отримується аналітично (для вейвлетів *Гаусса, mexihat, Morlet*), або в числовому вигляді через ШПФ. Важливою особливістю обчислення в спектральній області є можливість отримання (в окремих випадках) аналітичних виразів для спектра вейвлет-функції.

Значення НВП отримуються на основі дійсної частини процедури оберненого (відносно зміщення $b[p]$) дискретного (або швидкого) перетворення Фур'є добутку дискретизованих спектрів $S(jf)[i]$ та $F^*(jaf)[i]$. Кількість дискретних значень зміщення дорівнює кількості відліків сигналу, причому початок координат зміщений в центр діапазону значень зміщення.

Для порівняння обчислювальних затрат при обчисленні прямого НВП з використанням обчислень в часовій та спектральній області було проведено числові експерименти з різною кількістю дискретних відліків сигналу та двома вейвлет-функціями, для яких існують аналітичні вирази як самих вейвлет-функцій, так і їх спектрів (*mexihat* та *Morlet*). На рис. 1, *а, б* наведені графіки залежності часу обчислень прямого НВП від кількості дискретів сигналу.

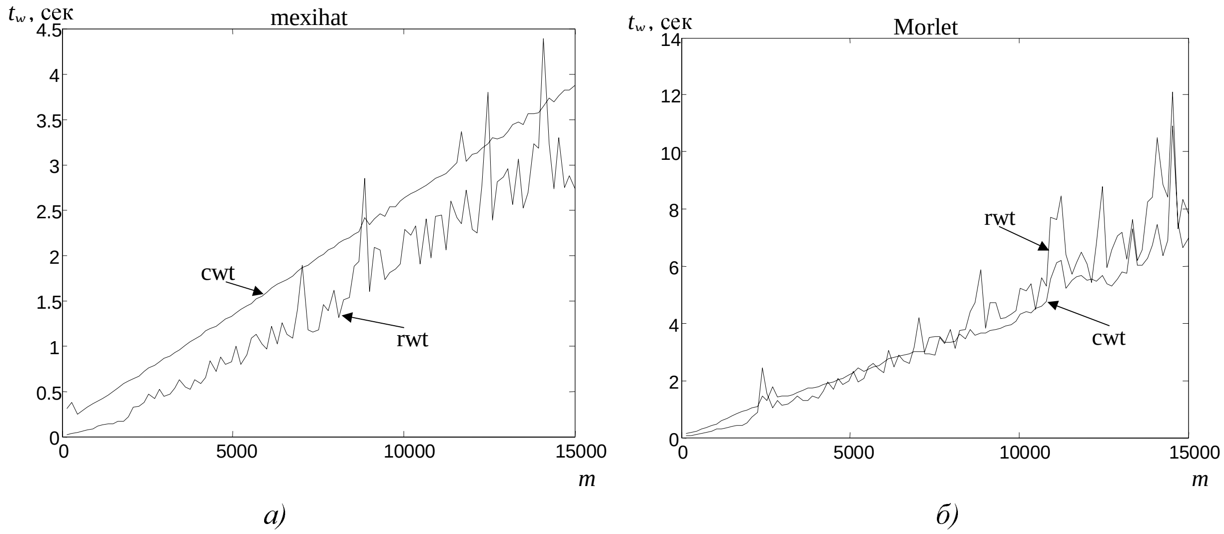

Рис. 1. Залежність часу виконання НВП від кількості дискретних відліків

Кількість масштабних коефіцієнтів для обидвох варіантів реалізації НВП була однаковою та дорівнювала 40. Обчислення виконувались на ПК з тактовою частотою процесора 350 МГц. Як видно з наведених залежностей, з точки зору обчислювальних затрат вибір кращого методу залежить від вейвлет-функції та кількості дискретних відліків сигналу.

Обчислення прямого НВП з довільною вейвлет-функцією. Для реалізації прямого НВП з довільною вейвлет-функцією, заданою не аналітично, а послідовністю дискретних часових відліків з довільним кроком дискретизації були модифіковані алгоритми обчислення в часовій (*cwt*) та частотній (*rwt*) області. Як і в попередніх випадках, сигнал $s(t)$ задається послідовністю m дискретних відліків $s[i]$; $i = \overline{1, m}$ на відрізку $[t_1; t_2]$ з постійним кроком дискретизації Δt_1. Аналогічним чином на відрізку $[t_3; t_4]$ задана вейвлет-функція $\psi(t)$: $\psi[j]$; $j = \overline{1, n_2}$. Зсуви в часі визначаються кроком дискретизації сигналу: $b[p] = p \cdot \Delta t_1$; $p = 0; \pm 1; \ldots$. Для забезпечення відповідності кроків дискретизації сигналу та вейвлет-функції при різних масштабах вейвлет-функція інтерполюється на відрізку $[t_3; t_4]$ методом кубічної сплайн-інтерполяції при кількості точок $n_3 = 2^N$.

Аналогічно стандартному алгоритму *cwt* формується масив індексів в масиві відліків дискретних значень вейвлет-функції, що відповідають кроку дискретизації сигналу при заданому масштабі відповідно до співвідношення (4). При обчисленнях в часовій області НВП обчислюється як ряд кореляційних функцій (згорток) для кожного масштабу, а в спектральній області процедурою швидкого перетворення Фур'є обчислюється спектральна густина масштабованої вейвлет-функції з наступним перетворенням Фур'є (відносно зміщення) добутку спектрів.

Обчислення оберненого НВП. При заданих перетворенні *cwt* та вейвлет-функції $\psi(t)$ сигнал $s(t)$ відтворюється відповідно до оберненого вейвлет-перетворення [1]:

$$s(t) = \frac{1}{C_F} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} cwt[s(t); \psi(t), a, b] \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \cdot da \,, \tag{9}$$

де $C_F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(jf)|^2}{|f|} df$; $F(jf)$ – спектр вейвлет-функції.

Значення C_F отримується в результаті числового інтегрування або (в окремих випадках) може бути отримане в аналітичному вигляді за допомогою ППП символьної математики. При обчисленні оберненого НВП інтеграл за *a* наближено наводиться сумою за інтервалами, які визначаються масштабами a_i, для яких обчислене НВП:

$$s(t) \approx \frac{1}{C_F} \sum_i \frac{1}{a_i^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} cwt[s(t); \psi(t), a_i, b] \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} \psi\left(\frac{t-b}{a_i}\right) db \right) \Delta a_i \,. \tag{10}$$

Інтегрування за a передбачає використання від'ємних значень масштабів, які не допускаються, наприклад, у програмі *cwt*. У зв'язку з цим необхідно замінити від'ємні масштаби еквівалентними додатніми. Легко показати, що існує співвідношення:

$$cwt[s(t); \psi(t), -a, b] = cwt[s(-t); \psi(t), a, -b] \,. \tag{11}$$

Інтеграл у виразі (10) після заміни $\tau = -b$ може бути перетворений так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} cwt[s(t); \psi(t), a_i, -\tau] \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} \psi\left(\frac{\tau+t}{a_i}\right) d\tau = cwt[cwt[s(t); \psi(t), a_i, -\tau]; \psi(t), a_i, -t] \,. \tag{12}$$

Отже, обчислення інтеграла по b зводиться до прямого НВП функції $cwt[s(t); \psi(t), a_i, -\tau]$ при зміщенні $-t$. На рис. 2 зображені деякий початковий сигнал $s(t)$ та результат його реконструкції за допомогою оберненого НВП при використанні вейвлет-функції *mexihat*. Сигнал являє собою нормований фрагмент мовного сигналу з частотою дискретизації 44,1 кГц та кількістю дискретних відліків 200. Значення масштабів, для яких обчислювалося пряме НВП та реконструйовувався сигнал за допомогою оберненого НВП, становили: $a_{min} = 1$; $a_{max} = 100$; кількість масштабів $k_a = 100$; послідовність масштабів утворює геометричну прогресію зі знаменником $(a_{max}/a_{min})^{1/k_a}$.

Для забезпечення достатньо повного вейвлет-аналізу та можливості реконструкції сигналу необхідно обчислювати пряме НВП для значень масштабів та зміщень, при яких

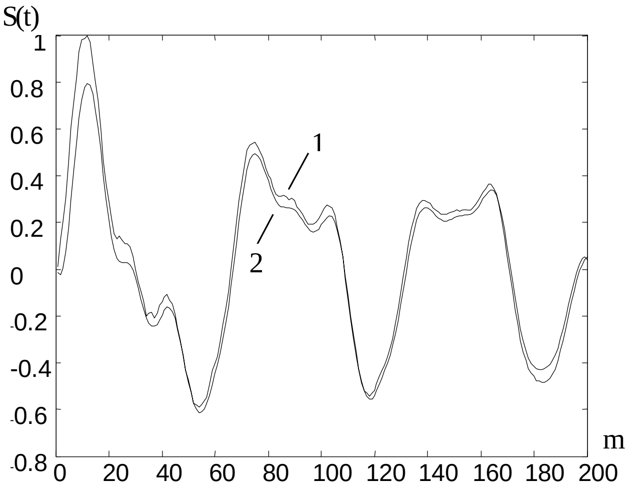

Рис. 2. Реконструкція сигналу за допомогою оберненого НВП:
1 – початковий сигнал; 2 – реконструйований сигнал

НВП не є близьким до нуля. Деяка оцінка достатнього діапазону зміщень при деякому масштабі може бути отримана на основі такої властивості НВП:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{cwt}[s(t); \psi(t), a, b] db = 0 . \qquad (13)$$

Ця властивість отримується після підставляння виразу для НВП, зміни порядку інтегрування по b та t та використання основної властивості вейвлет-функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 . \qquad (14)$$

Деякі оцінки похибок обчислень як прямого, так і оберненого НВП, обумовлених використанням скінченних меж інтегрування, можуть бути отримані на основі використання відомої інтегральної нерівності Коші-Буняковського.

Висновки. Пряме НВП може бути обчислене або на основі часового або на основі спектрального подання. З точки зору обчислювальних затрат порівняльна ефективність залежить від вейвлет-функції та кількості дискретних значень сигналу. При використанні наявних програм обчислення прямого НВП результати їх роботи повинні відповідати формальним означенням. Ці програми можуть бути модифіковані для обчислення прямого НВП для довільних вейвлет-функцій та обчислення оберненого НВП.

1. Жушма В.Б., Корінь Р.К., Мовчан Т.В., Писаренко Л.Д., Путілов Ю.В. Хвилькове перетворення: неперервна версія (continuous wavelet transform) // Електроніка та зв'язок. – 1999. – № 6. – Т. 2. – С. 288 – 301. 2. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с. 3. WaveLab 802 for MATLAB 5.x. – http://www-stat.stanford.edu/~wavelab/pcdownload.html. 4. Алексеев К.А. Обратное континуальное вейвлет-преобразование. Дополнительные функции Wavelet Toolbox. – 4 с. –http://www.matlab.ru/wavelet/book2/icwt_1.asp.