

München. — Wien: Oldenburg, 2002. 3. Winkelmann, Peter: Vertriebskonzeption und Vertriebssteuerung: die operativen Elemente des Marketing / von Peter Winkelmann. — München: Vahlen, 2000. 4. Becker, J.: (Marketing-Konzeption), Marketing-Konzeption, 6. Aufl., München, 1998. 5. Bruhn, M.; Meffert, H. (Hrsg.) (1998): Handbuch Dienstleistungsmanagement. — Wiesbaden, 1998.

УДК 330.4

Р.Й. Петрович

Національний університет “Львівська політехніка”

ПРИСКОРЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ БАГАТОКРАТНОГО АГРЕГАТИВНО- ІТЕРАТИВНОГО АЛГОРИТМУ

© Петрович Р.Й., 2003

Використовуючи багатократний агрегативно-ітеративний алгоритм, побудовані агрегативно-ітеративні аналоги методу простої ітерації та методу послідовної верхньої релаксації. Одержано оцінки швидкості збіжності.

Using the technique of construction of aggregative-iterational algorithm, the aggregative-iterational analogues of a successive overrelaxation method and method of simple iterations are constructed. The conditions of convergence and estimations of error bounds are obtained.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь виникають як проміжковий або кінцевий етап розв'язання прикладних задач у задачах математичного програмування, статистичної обробки даних, в економічних задачах (міжгалузевий баланс, модель Леонтєва “витрати-випуск”, ціноутворення, оптимізаційні задачі). Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь існує багато числових методів, однак усі вони мають порівняно один з одним деякі переваги і недоліки. Загальні числові методи не враховують особливостей матриць систем, що утворюються при моделюванні конкретних класів задач. Методи, розроблені для систем лінійних алгебраїчних рівнянь конкретного вигляду не можна застосовувати в загальному випадку або таке застосування є неефективним. У цьому дослідженні пропонується спосіб прискорення збіжності відомих методів знаходження розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь на прикладі методу послідовної верхньої релаксації та простої ітерації. Ефект прискорення збіжності досягається за рахунок властивості розроблених автором агрегативно-ітеративних алгоритмів нейтралізувати вплив на швидкість збіжності кількох найбільших за модулем власних значень матриці переходу методу.

У [1] побудовані і досліджені ітераційні алгоритми для лінійних рівнянь у скінченновимірному просторі, названі багатократними агрегативно-ітеративними алгоритмами. Для систем лінійних рівнянь вигляду

$$x = \tilde{A}x + \tilde{b}, \quad (1)$$

де $x \in R^N$, $\tilde{b} \in R^N$, \tilde{A} — матриця розміру $N \times N$, пропонувався ітераційний алгоритм

$$x^{(n+1)} = \tilde{A}x^{(n)} + \Psi\Lambda(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + \tilde{b}, \quad (2)$$

$$y^{(n+1)} = (I - \Lambda)^{-1} \Phi^T \tilde{A}_2 x^{(n)}, \quad (3)$$

де $x^{(n)} \in R^N$, $y^{(m)} \in R^m$ — ітераційні параметри, Ψ — матриця розміру $N \times m$, $\Lambda = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m)$, Φ — матриця розміру $N \times m$, $\tilde{A}_2 = \tilde{A} - \Psi \Lambda \Phi^T$,

$$\Phi^T \Psi = I, \quad (4)$$

причому початкове наближення вибиралось із множини початкових наближень

$$\varepsilon_m = \left\{ \left[x, y \right] \mid x \in R^N, y \in R^m, \Phi^T x + y = (I - \Lambda)^{-1} \Phi^T \tilde{b} \right\}. \quad (5)$$

Одержані в [1] умови збіжності та оцінки похибок дозволяють зробити висновок, що швидкість збіжності алгоритму (2) – (3) може бути як завгодно близькою до $|\mu_{m+1}|$, де μ_i , $i=1, \dots, N$ — власні значення матриці \tilde{A} , для яких справджуються нерівності

$$|\mu_N| \leq \dots \leq |\mu_{m+1}| < |\mu_m| \leq \dots \leq |\mu_1|.$$

У пропонованому дослідженні описану в [1] методику використовують для побудови агрегативно-ітеративних аналогів відомих ітераційних методів для систем лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$Bx = b_1. \quad (6)$$

Будь-який стаціонарний однокроковий ітераційний метод для системи (6) має вигляд

$$x^{(n+1)} = Cx^{(n)} + d, \quad (7)$$

де C — матриця переходу методу. Спосіб побудови матриці C за деяких обмежень, зумовлених в кожному конкретному методі, гарантує, що спектральний радіус $\rho(C)$ є меншим за одиницю. Система $x = Cx + d$ еквівалентна (6). Агрегативно-ітеративні аналоги відомих методів отримуються шляхом застосування до неї алгоритмів, описаних в [1].

Поширеним методом розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод простої ітерації. Для системи лінійних алгебраїчних рівнянь (6), де B — позитивно визначена матриця розміру $N \times N$, $b_1 \in R^N$, метод простої ітерації запишеться у вигляді (2) – (3), де $A = I - \tau B$, $b = \tau b_1$, M і m – оцінки найбільшого і найменшого власних значень матриці

B , $\tau = \frac{2}{M + m}$. Вважаємо заданими наближення до m власних чисел матриці A λ_i ($i=1, \dots, m$)

і вектори φ_i ($i=1, \dots, m$) та ψ_i ($i=1, \dots, m$), причому $(\varphi_i, \psi_i) = \delta_{ij}$. Утворимо матрицю

$A_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \psi_i \varphi_i^T$, а також матрицю Ψ розміру $N \times m$, стовпцями якої є вектори ψ_i ($i=1, \dots, m$),

діагональну матрицю $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ та матрицю Φ розміру $N \times m$, стовпцями якої є φ_i ($i=1, \dots, m$). Застосувавши методику, описану в [1], одержимо агрегативно-ітеративний аналог методу простої ітерації

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \tau (Bx^{(n)} - b_1) + \Psi \Lambda (y^{(n)} - y^{(n+1)}), \quad (8)$$

$$y^{(n+1)} = -(I - \Lambda + \alpha)^{-1} \Phi^T A_2 x^{(n)}, \quad (9)$$

де $A_2 = A - A_1$. Множина початкових наближень запишеться у вигляді

$$\varepsilon_m = \left\{ \left[x, y \right] \mid x \in R^N, y \in R^m, \Phi^T x + y = (I - \Lambda)^{-1} \Phi^T b \right\}. \quad (10)$$

Ітераційний процес (8),(9) у просторі R^{N+m} можна подати у вигляді

$$z^{(n+1)} = Cz^{(n)} + d, \quad (11)$$

$$\text{де } z^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} b \\ \Theta_m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} I - \tau B + \Psi \Lambda (I - \Lambda)^{-1} \Phi^T A_2 & \Psi \Lambda \\ (I - \Lambda + \alpha)^{-1} \Phi^T A_2 & \Theta \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Якщо для власних чисел матриці C справджуються співвідношення $|\lambda_{N+m}| \leq \dots \leq |\lambda_{m+1}| < |\lambda_m| \leq \dots \leq |\lambda_1|$, $|\lambda_{m+1}| < 1$, то за умови вибору початкового наближення із множини (10) ітераційний процес (8), (9) збігається до розв'язку, і для кожного ε , $0 < \varepsilon < 1 - |\lambda_{m+1}|$, справджується оцінка

$$\|z^{(n)} - z^*\| \leq K(\varepsilon) |\lambda_{m+1}| + \varepsilon^n \|z^{(0)} - Cz^{(0)} - d\|. \quad (12)$$

Для випадку, коли матриця системи є симетричною, оцінка (12) набуває вигляду

$$\|z^{(n)} - z^*\|_2 \leq K |\lambda_{m+1}|^n \|z^{(0)} - Cz^{(0)} - d\|_2. \quad (13)$$

З (13) випливає оцінка кількості ітерацій, необхідної для зменшення похибки в ε разів:

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln |\lambda_{m+1}|}, \quad (14)$$

у той час як для кількості ітерацій звичайного методу простої ітерації правдива оцінка

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln |\lambda_1|}. \quad (15)$$

Метод послідовної верхньої релаксації є одним з найефективніших і уживаніших серед методів знаходження розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду (6) у випадку, коли матриця коефіцієнтів B — симетрична, позитивно визначена і узгоджено-впорядкована. У матричному вигляді метод послідовної верхньої релаксації можна подати у вигляді

$$(D - \omega C_L)x^{(n+1)} = ((1 - \omega)D + C_U)x^{(n)} + \omega b_1 \quad (16)$$

де D — блоково-діагональна матриця, C_L , C_U — строго нижня і верхня трикутні матриці, причому

$$B = D - C_L - C_U. \quad (17)$$

Основна складність застосування методу послідовної верхньої релаксації полягає у виборі оптимального значення релаксаційного параметра $\omega = \omega_0$, на якому досягається мінімум спектрального радіуса оператора переходу методу послідовної верхньої релаксації

$$L_\omega = (I - \omega D^{-1} C_L)^{-1} (\omega D^{-1} C_U + (1 - \omega)I). \quad (18)$$

У випадку, коли матриця B узгоджено-впорядкована, значення ω_0 єдине і його можна виразити через спектральний радіус матриці

$$G = D^{-1}(C_L + C_U), \quad (19)$$

що є матрицею переходу методу Якобі

$$x^{(n+1)} = Gx^{(n)} + D^{-1}b_1 \quad (20)$$

для системи (6). Однак, якщо матриця B не є узгоджено впорядкованою, то, як зазначається в [2], звичайно не вдається дати рекомендацій щодо вибору ω_0 .

За вказаних умов (симетричність, позитивна визначеність і узгоджена-впорядкованість матриці B) власні значення матриці G μ_i утворюють пари з протилежними знаками. Отже, їх можна впорядкувати так:

$$-\mu_1 \leq -\mu_2 \leq \dots \leq -\mu_s < 0 = \dots = 0 < \mu_s \leq \dots \leq \mu_2 \leq \mu_1 < 1 \quad (21)$$

Існує зв'язок між власними значеннями матриці переходу L_ω і власними значеннями матриці G . Якщо $\omega \neq 0$, то для кожного μ_i ($i=1, \dots, s$) два числа

$$\lambda_i^+, \lambda_i^- = \left(\frac{\omega\mu_i \pm \sqrt{\omega^2\mu_i^2 - 4(\omega-1)}}{2} \right) \quad (22)$$

є власними числами матриці L_ω . Оптимальне значення релаксаційного параметра ω_0 знаходиться за формулою

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu_1}}. \quad (23)$$

При $\omega < \omega_0$ спектр матриці переходу L_ω можна поділити на три групи:

- 1) власні значення, розташовані в комплексній площині на колі $|z| = \omega - 1$;
- 2) m власних значень λ_i^+ розташованих на дійсній осі і більших за $\omega - 1$

$$\lambda_i^+ = \left(\frac{\omega\mu_i + \sqrt{\omega^2\mu_i^2 - 4(\omega-1)}}{2} \right)^2; \quad (24)$$

- 3) m власних значень λ_i^- розташованих на дійсній осі і менших за $\omega - 1$

$$\lambda_i^- = \left(\frac{\omega\mu_i - \sqrt{\omega^2\mu_i^2 - 4(\omega-1)}}{2} \right)^2. \quad (25)$$

Запишемо формально метод (8)-(9) у вигляді

$$x^{(n+1)} = L_\omega x^{(n)} + d, \quad (26)$$

де $d = (I - \omega C_L)^{-1} b_1$. Зауважимо, що вектор d знаходиться, як розв'язок рівняння

$$(I - \omega C_L)d = b_1, \quad (27)$$

матриця якого трикутна.

Вважаємо заданими числа $\tilde{\lambda}_i$ ($i=1, \dots, m$) і вектори φ_i ($i=1, \dots, m$) та ψ_i ($i=1, \dots, m$), для яких справджуються співвідношення

$$(\varphi_i, \psi_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Утворимо матрицю

$$A_1 = \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \psi_i \varphi_i^T \quad (28)$$

а також матрицю Ψ розміру $N \times m$, стовпцями якої є вектори ψ_i , ($i=1, \dots, m$), діагональну матрицю $\Lambda = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m)$, та матрицю Φ розміру $N \times m$, стовпцями якої є φ_i ($i=1, \dots, m$). Застосувавши до (26) методику побудови агрегативно-ітеративних алгоритмів, описану в [1], одержимо агрегативно-ітеративний аналог методу послідовної верхньої релаксації

$$x^{(n+1)} = L_\omega x^{(n)} + \Psi \Lambda (y^{(n)} - y^{(n+1)}) + d, \quad (29)$$

$$y^{(n+1)} = A_2 x^{(n)}, \quad (30)$$

де $A_2 = -(I - \Lambda)^{-1} \Phi^T (L_\omega - A_1)$. Множина початкових наближень набирає вигляду

$$\varepsilon_m = \{ \{x, y\} \mid x \in R^N, y \in R^m, \Phi^T x + y = (I - \Lambda)^{-1} \Phi^T d \} \quad (31)$$

Ітераційний процес (29),(30) у просторі R^{N+m} можна подати у вигляді

$$z^{n+1} = C z^n + \tilde{d}, \quad (32)$$

де

$$z^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}^{(n)} = \begin{pmatrix} d \\ \Theta_m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} L_\omega - \Psi \Lambda A_2 & \Psi \Lambda \\ A_2 & \Theta \end{pmatrix}, \quad (33)$$

Θ_m – нульовий елемент у просторі R^m , Θ – нульова матриця розміру $m \times m$.

Теорема 2. Якщо для власних чисел матриці C справджуються співвідношення

$$|\tilde{\lambda}_{N+m}| \leq \dots \leq |\tilde{\lambda}_{m+1}| < |\tilde{\lambda}_m| \leq \dots \leq |\tilde{\lambda}_1|, \quad (34)$$

то за умови вибору початкового наближення із множини (23) ітераційний процес (29) – (30) збігається до розв'язку, причому

$$\|z^{(n)} - z^*\| \leq C(\varepsilon) |\tilde{\lambda}_{m+1}| + \varepsilon^n \|z^{(0)} - C z^{(0)} - \tilde{d}\|. \quad (35)$$

В ідеальному випадку, коли, наприклад, $\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu_{m+1}}}$ і відомі власні значення

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ матриці переходу методу послідовної верхньої релаксації L_ω , власні вектори ψ_i та ліві власні вектори φ_i ($i=1, \dots, m$), що їм відповідають, вдається покращити швидкість

збіжності до $\rho(L) = |\lambda_{m+1}| = \omega - 1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \mu_{m+1}}}{1 + \sqrt{1 - \mu_{m+1}}}$ порівняно з оптимальною швидкістю

збіжності методу послідовної верхньої релаксації $\rho(L_0) = \omega_0 - 1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \mu_1}}{1 + \sqrt{1 - \mu_1}}$.

1. Петрович Р.Й. Багатократний агрегативно-ітеративний алгоритм для систем лінійних алгебраїчних рівнянь // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". — Львів, 1996. — № 299. — С. 183 — 185. 2. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. — М.: Мир, 1986. — 448 с. 3. Шувар Б.А. Обобщение метода итеративного агрегирования. Львов. политехн. ин-т. — Львов, 1992. — 21 с. — Деп в УкрНИИТИ 15.01.92, № 43 — Ук92.