

ПРО МІЦНІСТЬ ТІЛА, ПОСЛАБЛЕНОГО ПЛОСКОЮ НЕОДНОЗВ'ЯЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З КОЛОВИМИ КОНТУРАМИ

© Стасюк Б.М., 2003

Досліджено концентрацію напружень в безмежному пружному тілі, що містить плоску неоднорозв'язну тріщину з контурами у вигляді кіл. В загальному випадку зв'язності області тріщини проведено розділення граничних інтегральних рівнянь (ГІР), до яких зводиться дана задача, на незалежні; побудовано регулярний аналог отриманих інтегральних рівнянь та запропоновано числову методику його розв'язування. Виведено формули для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) на зовнішньому та внутрішніх контурах тріщини. Ця методика числово реалізована на прикладі двозв'язної тріщини у вигляді ексцентричного кільця, поверхні якої перебувають під дією зсувних зусиль.

Work is devoted to research of stress concentration in the space containing a multiply connected crack with circular contours. In the general case of connectivity crack area are divided the boundary integral equations for this problem to independent equations. The regular analogue of the received integrated equations is constructed and the numerical method of its decision is offered. Formulas for definition of stress intensity factors on external and internal contours of a crack are deduced. This numerical method is realized by the example of a doubly-connected eccentric annular crack which surfaces are under shear loading.

1. Вступ

Міцність реальних твердих тіл визначається не тільки їх фізико-хімічною природою, а й істотно залежить від наявних у них дефектів, таких, як тріщини, чужорідні включення та інші недосконалості структури, які можуть виникнути під час виготовлення тіл або їх експлуатації. Під час деформування твердого тіла в околі мікрodefektів виникає висока концентрація напружень, що приводить до утворення та росту тріщин, тобто до локального або повного руйнування тіла. Найбільш простий і поширений в інженерній практиці метод врахування дефективності структури твердого тіла є введення коефіцієнта запасу міцності. Відсутність методик точного визначення концентрації напружень в тілах з тріщинами та визначення граничнодопустимого навантаження таких тіл призводить до вибору не виправдано високого коефіцієнта запасу міцності, що, в свою чергу, означає збільшення ваги та розмірів елементів конструкцій.

Задачі про визначення концентрації напружень в околі контуру плоскої тріщини є тривимірними змішаними задачами теорії пружності і можуть бути зведені до двовимірних граничних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу. Методика зведення задач для тіл з розрізами до граничних інтегральних рівнянь викладена в роботах [1, 2]. Отримані в цих роботах рівняння спостерігаються також і у випадку, коли контур тріщини складається з декількох замкнутих кривих (неоднорозв'язні тріщини). Розв'язування таких рівнянь є складною математичною проблемою навіть для випадку, коли тріщини займають однорозв'язну область. У зв'язку з цим, в літературі більшість результатів, які пов'язані з дослідженням неоднорозв'язних тріщин, обмежуються розглядом часткових випадків

навантаження тріщин, які займають двозв'язні кільцеві області [1, 3, 5, 6, 8, 10, 11] та області близькі до кільцевих [4, 7]. Тут вирішується проблема розв'язування задачі про тіло з тріщиною, контур якої складається з декількох кіл, що не перетинаються.

2. Постановка задачі

Розглянемо безмежне пружне ізотропне тіло, послаблене плоскою неоднорозв'язною тріщиною. Нехай контур області S , яку займає тріщина, складається з $N+1$ кіл, що не перетинаються (рис. 1). Позначимо через L зовнішній контур тріщини (коло радіуса a), а через L_n ($n=1, \overline{N}$) – внутрішні контури з радіусом a_n . Виберемо базову декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ з початком в центрі зовнішнього контуру так, щоб протилежним поверхням S^\pm тріщини відповідали значення $x_3 = \pm 0$, тобто площина тріщини була розташована в координатній площині x_1Ox_2 . У центрах внутрішніх контурів виберемо локальні декартові системи координат $O_ny_{1n}y_{2n}y_{3n}$, осі яких є паралельними до відповідних осей базової системи координат. $(d_{1n}, d_{2n}, 0)$ – координати точок O_n в базовій системі координат. Нехай поверхні тріщини знаходяться під дією статичних самозрівноважених зусиль $N_i(x)$ ($i=1,2,3$), напрямки яких збігаються з напрямками осей Ox_i відповідно.

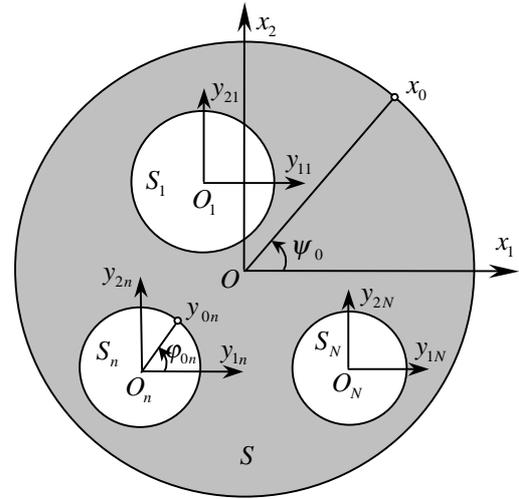


Рис. 1

Задача про концентрацію напружень в розглядуваному випадку зводиться до розв'язування системи трьох граничних інтегральних рівнянь:

$$\Delta_x \iint_S \frac{\alpha_3(\xi)}{|x-\xi|} d_\xi S = \frac{1-\nu}{G} N_3(x); \quad (1)$$

$$\Delta_x \iint_S \frac{\alpha_j(\xi)}{|x-\xi|} d_\xi S + (-1)^j \nu \frac{\partial}{\partial x_{3-j}} \iint_S \left[\alpha_1(\xi) \frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha_2(\xi) \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \frac{d_\xi S}{|x-\xi|} = \frac{1-\nu}{G} N_j(x), \quad j=1,2, \quad (2)$$

де $x \in S$; $\alpha_i(\xi)$ – невідомі функції, які характеризують зміщення протилежних точок поверхні S , викликані заданим зовнішнім зусиллям $N_i(x)$; G і ν – пружні характеристики тіла, яке містить тріщину; Δ_x – двовимірний оператор Лапласа.

3. Розділення системи ГІР на незалежні рівняння

З рівняння (1) можемо визначити нормальне розкриття тріщини, проте рівняння (2) відносно функцій розкриття зсуву є взаємопов'язані між собою. Це ускладнює числове обчислення цих функцій. В роботі [8] запропонована методика розділення системи рівнянь (2) на незалежні. Користуючись цією методикою, система рівнянь (2) приводиться до незалежних рівнянь (3).

$$\Delta_x \iint_S \frac{\alpha_j(\xi)}{|x-\xi|} d_\xi S = N_j^*(x) - (-1)^j \nu \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_{3-j}} \stackrel{def}{=} \Phi_j(x), \quad x \in S, \quad j=1,2, \quad (3)$$

де $N_j^*(x) = \frac{1-\nu}{G} N_j(x)$; $\Psi(x) = Q(x) + f(x)$; $Q(x) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \iint_S \left(\frac{\partial N_1^*(\xi)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial N_2^*(\xi)}{\partial \xi_1} \right) \ln|x-\xi| d_\xi S$; $f(x)$ – гармонічна в області S функція, яка є розв'язком інтегрального рівняння другого роду типу ньютонівського потенціалу (4).

$$f(x) - \frac{\nu}{2\pi} \iint_S \left(\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \ln|x-\xi| d_\xi S = \Omega(x); x \in S, \quad (4)$$

$$\text{де } \Omega(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left(N_1^*(\xi) \frac{\partial}{\partial x_2} + N_2^*(\xi) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \ln|x-\xi| d_\xi S - Q(x) + \iint_S \left(\frac{\partial Q(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial Q(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \ln|x-\xi| d_\xi S.$$

У випадку постійного навантаження $N_j^*(x) = N_j^0 = \text{const}$, вираз для функції $\Omega(x)$ значно спрощується:

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left(N_1^0 \frac{\partial}{\partial x_2} + N_2^0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \ln|x-\xi| d_\xi S, x \in S. \quad (5)$$

Для обчислення функції (5) представимо допоміжний інтеграл у вигляді:

$$\iint_S \ln|x-\xi| d_\xi S = \iint_{S^*} \ln|x-\xi| d_\xi S - \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \ln|x-\xi| d_\xi S, x \in S,$$

де S^* – однозв'язна область, отримана доповненням області S до круга радіуса a ($S^* = S \cup S_1 \cup \dots \cup S_N$). Після громіздких математичних перетворень отримаємо

$$\iint_{S^*} \ln|x-\xi| d_\xi S = \frac{\pi}{2} (a^2 \ln a^2 - a^2 + x_1^2 + x_2^2), x \in S,$$

$$\iint_{S_n} \ln|x-\xi| d_\xi S = \iint_{S_n} \ln|y_n - \eta_n| d_\eta S_n = \frac{\pi a_n^2}{2} \ln(y_{1n}^2 + y_{2n}^2), y_n \notin S_n.$$

Враховуючи це та переходячи до базової системи координат, отримаємо:

$$\iint_S \ln|x-\xi| d_\xi S = \frac{\pi}{2} (a^2 \ln a^2 - a^2 + x_1^2 + x_2^2) - \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2 \ln \left[(x_{1n} - d_{1n})^2 + (x_{2n} - d_{2n})^2 \right], x \in S.$$

Тут враховано, що співвідношення між координатами точки в базовій та локальній системі координат мають вигляд: $x_{jn} = y_{jn} + d_{jn}$. Отже, функція $\Omega(x)$ дорівнює:

$$\Omega(x) = \frac{1}{2} (N_1^0 x_2 + N_2^0 x_1) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{a_n^2 \left[N_1^0 (x_{2n} - d_{2n}) + N_2^0 (x_{1n} - d_{1n}) \right]}{(x_{1n} - d_{1n})^2 + (x_{2n} - d_{2n})^2}, x \in S. \quad (6)$$

Оскільки рівняння (3) містить похідні від функції $f(x)$, а не саму функцію, про- диференціюємо рівняння (4) по x_1 та по x_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} - \frac{\nu}{2\pi} \iint_S \left(\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \ln|x-\xi| d_\eta S = \\ & = \frac{N_2^0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2 \frac{N_2^0 \left[(x_{1n} - d_{1n})^2 - (x_{2n} - d_{2n})^2 \right] + 2N_1^0 (x_{1n} - d_{1n})(x_{2n} - d_{2n})}{\left[(x_{1n} - d_{1n})^2 + (x_{2n} - d_{2n})^2 \right]^2}, x \in S, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} - \frac{\nu}{2\pi} \iint_S \left(\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \ln|x-\xi| d_\xi S = \\ & = \frac{N_1^0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2 \frac{N_1^0 \left[(x_{2n} - d_{2n})^2 - (x_{1n} - d_{1n})^2 \right] + 2N_2^0 (x_{1n} - d_{1n})(x_{2n} - d_{2n})}{\left[(x_{1n} - d_{1n})^2 + (x_{2n} - d_{2n})^2 \right]^2}, x \in S, \end{aligned}$$

Систему рівнянь (7) відносно невідомих функцій $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ та $\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$ пропонується розв'язувати числово.

4. Розв'язування системи ГР

Після застосування вищевикладеної методики розділення системи рівнянь задача зводиться до розв'язування трьох незалежних однотипних рівнянь відносно трьох функцій, що характеризують розкриття тріщини під дією заданого зовнішнього навантаження.

$$\Delta_x \iint_S \frac{\alpha_j(\xi)}{|x-\xi|} d_\xi S = \Phi_j^*(x) = \begin{cases} \Phi_j(x); & j=1,2, \\ N_3^*(x); & j=3, \end{cases} \quad x \in S. \quad (8)$$

Розширивши область інтегрування в рівняннях (8) на область S^* , отримаємо:

$$\Delta_x \iint_{S^*} \frac{\alpha_j^-(\xi)}{|x-\xi|} d_\xi S = \Omega_j^-(x) = \begin{cases} \Phi_j^*(x), & x \in S, \\ q_m(x), & x \in S_n, n=1, \overline{N}, \end{cases} \quad \alpha_j^-(x) = \begin{cases} \alpha_j(x), & x \in S, \\ 0, & x \in S_n, n=1, \overline{N}, \end{cases} \quad j=1,2,3. \quad (9)$$

Розв'язки цих рівнянь мають вигляд [2]:

$$\alpha_j^-(x) = -\frac{1}{2\pi^3} \iint_{S^*} \frac{\Omega_j^-(\xi)}{|x-\xi|} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2} \sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}}{a|x-\xi|} d_\xi S, \quad j=1,2,3, \quad x \in S^*, \quad (10)$$

У розв'язки (10) входять невідомі функції $q_m(x)$, що мають зміст напружень $\sigma_{j3}(x)$ в точках області S_n . Ці функції визначаємо з умови $\alpha_j^-(x) = 0$, коли $x \in S_n$:

$$\iint_{S^*} \frac{\Omega_j^-(\xi)}{|x-\xi|} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2} \sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}}{a|x-\xi|} d_\xi S = 0, \quad j=1,2,3, \quad x \in S_n. \quad (11)$$

Звідси маємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \frac{q_m(\xi)}{|x-\xi|} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2} \sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}}{a|x-\xi|} d_\xi S_n = \\ & = -\iint_S \frac{\Phi_j^*(\xi)}{|x-\xi|} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2} \sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}}{a|x-\xi|} d_\xi S, \quad j=1,2,3, \quad n=1, \overline{N} \quad x \in S_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Отримано три незалежні системи рівнянь (12) (по N рівнянь кожна) відносно напружень $\sigma_{j3}(x)$ в точках області S_n . Один з інтегралів в лівій частині рівнянь (12) є сингулярним. Для його регуляризації та подальшого числового розв'язування отриманих рівнянь виділимо окремо сингулярний інтеграл та перейдемо до відповідної локальної системи координат.

$$\begin{aligned} & \iint_{S_m} \frac{q_{jm}(\eta_m)}{|y_m-\eta_m|} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-(y_{1m}+d_{1m})^2-(y_{2m}+d_{2m})^2} \sqrt{a^2-(\eta_{1m}+d_{1m})^2-(\eta_{2m}+d_{2m})^2}}{a|y_m-\eta_m|} d_\eta S_m + \\ & + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \iint_{S_n} \frac{q_{jn}(\eta_n)}{|y_m-\eta_n|} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-(y_{1m}+d_{1m})^2-(y_{2m}+d_{2m})^2} \sqrt{a^2-(\eta_{1n}+d_{1n})^2-(\eta_{2n}+d_{2n})^2}}{a|y_m-\eta_n|} d_\eta S_n = \\ & = -\iint_S \frac{\Phi_j^*(\xi)}{|y_m-\xi|} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-(y_{1m}+d_{1m})^2-(y_{2m}+d_{2m})^2} \sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}}{a|y_m-\xi|} d_\xi S \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \\ & \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \Phi_j^0(y_m), \quad j=1,2,3, \quad m=1, \overline{N}, \quad x \in S_m. \end{aligned} \quad (13)$$

Після регуляризації рівняння (13) будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} & \beta_{jm}(y_m) [I_m(y_m) - I_m^*(y_m)] + \iint_{S_m^*} \frac{\beta_{jm}(\eta_m)}{|y_m-\eta_m| \sqrt{a_m^2-\eta_{1m}^2-\eta_{2m}^2}} d_\eta S_m + \\ & + \frac{2}{\pi} \iint_{S_m} \frac{\beta_{jm}(\eta_m)}{|y_m-\eta_m| \sqrt{a_m^2-\eta_{1m}^2-\eta_{2m}^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-(y_{1m}+d_{1m})^2-(y_{2m}+d_{2m})^2} \sqrt{a^2-(\eta_{1m}+d_{1m})^2-(\eta_{2m}+d_{2m})^2}}{a|y_m-\eta_m|} - \frac{\pi}{2} \right] d_\eta S_m + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \frac{\beta_{jn}(\eta_n)}{|y_m - \eta_n| \sqrt{a_n^2 - \eta_{1n}^2 - \eta_{2n}^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - (y_m + d_m)^2 - (y_{2m} + d_{2m})^2} \sqrt{a^2 - (\eta_{1n} + d_{1n})^2 - (\eta_{2n} + d_{2n})^2}}{a|y_m - \eta_n|} d_\eta S_n = \\
& = \frac{2}{\pi} \Phi_j^0(y_m), \quad j=1,2,3, \quad m=\overline{1,N}, \quad x \in S_m,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\text{де} \quad q_{jn}(\eta_n) = \frac{\beta_{jn}(\eta_n)}{\sqrt{a_n^2 - \eta_{1n}^2 - \eta_{2n}^2}}, \quad j=1,2,3, \quad n=\overline{1,N}; \tag{15}$$

S_m^ε – двозв’язна область, що отримується з області S_m вирізанням околу точки $y_m = \eta_m$ малого радіуса;

$$I_m(y_m) = \iint_{S_m} \frac{1}{|y_m - \eta_m| \sqrt{a_m^2 - \eta_{1m}^2 - \eta_{2m}^2}} d_\eta S_m, \quad y_m \in S_m, \quad I_m^*(y_m) = \iint_{S_m^\varepsilon} \frac{1}{|y_m - \eta_m| \sqrt{a_m^2 - \eta_{1m}^2 - \eta_{2m}^2}} d_\eta S_m, \quad y_m \in S_m.$$

Єдиний сингулярний інтеграл в (14) може бути обчислений аналітично [2]:

$$I_m(y_m) = \pi^2.$$

Деякі підінтегральні функції в рівняннях (14) мають кореневу інтегровну особливість на контурі області S_m . Щоб уникнути цієї особливості при числовому обчисленні таких інтегралів, потрібно ввести нові змінні за допомогою заміни: $\eta_{1m} = a_m \sin \omega \cos \psi$, $\eta_{2m} = a_m \sin \omega \sin \psi$, $\omega \in [0, \pi/2]$ та $\psi \in [0, 2\pi]$. Інтегралі, з врахуванням цієї заміни, запишуться:

$$\iint_{S_m} \frac{g(y_n, \xi)}{|y_n - \xi| \sqrt{a_n^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}} d_\xi S = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{g(y_n, \omega, \psi)}{|y_n - \xi(\omega, \psi)|} a_n \sin \omega d\omega d\psi.$$

Рівняння (14) розв’язуємо числово методом колокацій. Значення функцій $\Phi_j^0(y_m)$ на границі області S_m замінюємо значенням кубічних сплайнів, що інтерполують ці функції всередині області. Отже, задача зводиться до розв’язування трьох систем лінійних рівнянь відносно значень функцій $\beta_{jm}(y_m)$ у вузлах області S_m .

5. Визначення КІН

Для обчислення КІН на зовнішньому контурі тріщини підставимо розв’язки (10) залежно КІН від функцій розкриття тріщини [1].

$$\begin{aligned}
k_1(x_0) &= -2\pi \sqrt{\pi} \frac{G}{1-\nu} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_3(x)}{\sqrt{2r}}, \\
k_2(x_0) &= -2\pi \sqrt{\pi} \frac{G}{1-\nu} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(x) \cos \psi_0 + \alpha_2(x) \sin \psi_0}{\sqrt{2r}}, \\
k_3(x_0) &= -2\pi \sqrt{\pi} G \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(x) \sin \psi_0 - \alpha_2(x) \cos \psi_0}{\sqrt{2r}},
\end{aligned} \tag{16}$$

де r – відстань точки x до контуру тріщини. Враховуючи асимптотику $\operatorname{arctg} x \approx x$ при $r \rightarrow 0$ після математичних перетворень та регуляризації сингулярних інтегралів, отримаємо:

$$\begin{aligned}
k_1(x_0) &= \frac{1}{\pi \sqrt{\pi} a} \frac{G}{1-\nu} \left[\left\{ 2\pi a - \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \frac{\sqrt{a^2 - (\eta_{1n} + d_{1n})^2 - (\eta_{2n} + d_{2n})^2}}{(a \cos \psi_0 - \eta_{1n} - d_{1n})^2 + (a \sin \psi_0 - \eta_{2n} - d_{2n})^2} d_\eta S_n - \right. \right. \\
& \left. \left. - \iint_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{(a \cos \psi_0 - \xi_1)^2 + (a \sin \psi_0 - \xi_2)^2} d_\xi S \right\} N_3^*(x) + \iint_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} N_3^*(\xi)}{(a \cos \psi_0 - \xi_1)^2 + (a \sin \psi_0 - \xi_2)^2} d_\xi S + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \frac{\sqrt{a^2 - (\eta_{1n} + d_{1n})^2 - (\eta_{2n} + d_{2n})^2} \beta_{3n}(\eta_n)}{\sqrt{a_n^2 - \eta_{1n}^2 - \eta_{2n}^2} [(a \cos \psi_0 - \eta_{1n} - d_{1n})^2 + (a \sin \psi_0 - \eta_{2n} - d_{2n})^2]} d_\eta S_n \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2(x_0) = & \frac{1}{\pi\sqrt{\pi a}} \frac{G}{1-\nu} \left[\left\{ 2\pi a - \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \frac{\sqrt{a^2 - (\eta_{1n} - r_{1n})^2 - (\eta_{2n} - r_{2n})^2}}{(a \cos \psi_0 - \eta_{1n} - d_{1n})^2 + (a \sin \psi_0 - \eta_{2n} - d_{2n})^2} d_\eta S_n - \right. \right. \\
& - \iint_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{(a \cos \psi_0 - \xi_1)^2 + (a \sin \psi_0 - \xi_2)^2} d_\xi S \left. \right\} (\Phi_1(x_0) \cos \psi_0 + \Phi_2(x_0) \sin \psi_0) + \\
& + \iint_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} (\Phi_1(\xi) \cos \psi_0 + \Phi_2(\xi) \sin \psi_0)}{(a \cos \psi_0 - \xi_1)^2 + (a \sin \psi_0 - \xi_2)^2} d_\xi S + \\
& + \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \frac{\sqrt{a^2 - (\eta_{1n} - r_{1n})^2 - (\eta_{2n} - r_{2n})^2} (\beta_{1n}(\eta_n) \cos \psi_0 + \beta_{2n}(\eta_n) \sin \psi_0)}{\sqrt{a_n^2 - \eta_{1n}^2 - \eta_{2n}^2} [(a \cos \psi_0 - \eta_{1n} - d_{1n})^2 + (a \sin \psi_0 - \eta_{2n} - d_{2n})^2]} d_\eta S_n \left. \right], \\
k_3(x_0) = & \frac{1}{\pi\sqrt{\pi a}} \frac{G}{1-\nu} \left[\left\{ 2\pi a - \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \frac{\sqrt{a^2 - (\eta_{1n} + d_{1n})^2 - (\eta_{2n} + d_{2n})^2}}{(a \cos \psi_0 - \eta_{1n} - d_{1n})^2 + (a \sin \psi_0 - \eta_{2n} - d_{2n})^2} d_\eta S_n - \right. \right. \\
& - \iint_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{(a \cos \psi_0 - \xi_1)^2 + (a \sin \psi_0 - \xi_2)^2} d_\xi S \left. \right\} (\Phi_1(x_0) \sin \psi_0 - \Phi_2(x_0) \cos \psi_0) + \\
& + \iint_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} (\Phi_1(\xi) \sin \psi_0 - \Phi_2(\xi) \cos \psi_0)}{(a \cos \psi_0 - \xi_1)^2 + (a \sin \psi_0 - \xi_2)^2} d_\xi S + \\
& + \sum_{n=1}^N \iint_{S_n} \frac{\sqrt{a^2 - (\eta_{1n} + d_{1n})^2 - (\eta_{2n} + d_{2n})^2} (\beta_{1n}(\eta_n) \sin \psi_0 - \beta_{2n}(\eta_n) \cos \psi_0)}{\sqrt{a_n^2 - \eta_{1n}^2 - \eta_{2n}^2} [(a \cos \psi_0 - \eta_{1n} - d_{1n})^2 + (a \sin \psi_0 - \eta_{2n} - d_{2n})^2]} d_\eta S_n \left. \right],
\end{aligned} \tag{17}$$

де x_0 – точка зовнішнього контуру області S ; ψ_0 – кутова координата цієї точки в базовій системі координат (рис. 1).

Обчислимо коефіцієнти інтенсивності напружень у точках внутрішніх контурів тріщини. Для цього використаємо формули залежності КІН від напружень [1]:

$$\begin{aligned}
k_1^{(n)}(y_{0n}) &= \lim_{r_n \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_n} \sigma_{33}(y_n), \\
k_2^{(n)}(y_{0n}) &= \lim_{r_n \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_n} (\sigma_{13}(y_n) \cos \varphi_{0n} + \sigma_{23}(y_n) \sin \varphi_{0n}), \\
k_3^{(n)}(y_{0n}) &= \lim_{r_n \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_n} (\sigma_{13}(y_n) \sin \varphi_{0n} - \sigma_{23}(y_n) \cos \varphi_{0n}),
\end{aligned} \tag{18}$$

де r_n – відстань від точки $y_n \in S_n$ до контуру області S_n ; φ_{0n} – кутова координата точки контуру y_{0n} в локальній системі координат (рис. 1). Враховуючи представлення компонент тензора напружень у вигляді комбінації потенціалів

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}(y_n) &= \frac{G}{1-\nu} \Delta_y \iint_{S'} \frac{\alpha_j^-(\eta)}{|y-\eta|} d_\eta S, \quad y_n \in S_n, \\
\sigma_{j3}(y_n) &= \frac{G}{1-\nu} \left[\Delta_y \iint_{S'} \frac{\alpha_j^-(\eta)}{|y_n-\eta|} d_\eta S + \nu (-1)^j \frac{\partial}{\partial y_{3-j,n}} \iint_{S'} \left[\alpha_1^-(\eta) \frac{\partial}{\partial y_{2n}} - \alpha_2^-(\eta) \frac{\partial}{\partial y_{1n}} \right] \frac{d_\eta S}{|y_n-\eta|} \right],
\end{aligned}$$

де $y_n \in S_n$ $j=1,2$; $\alpha_j^-(x) = \begin{cases} \alpha_j(x), & x \in S \quad j=\overline{1,3}, \\ 0, & x \in S_n, \end{cases}$

та переходячи до границі в виразах (18), отримаємо:

$$k_1^{(n)}(y_{0n}) = \frac{G}{1-\nu} \sqrt{\frac{\pi}{a_n}} \beta_{3n}(y_{0n}),$$

$$k_2^{(n)}(y_{0n}) = \frac{G}{1-\nu} \sqrt{\frac{\pi}{a_n}} [\beta_{1n}(y_{0n}) \cos \varphi_{0n} + \beta_{2n}(y_{0n}) \sin \varphi_{0n}], \quad (19)$$

$$k_3^{(n)}(y_{0n}) = G \sqrt{\frac{\pi}{a_n}} [\beta_{1n}(y_{0n}) \sin \varphi_{0n} - \beta_{2n}(y_{0n}) \cos \varphi_{0n}].$$

За критерій поширення тріщини виберемо енергетичний критерій Черепанова [9]:

$$(1-\nu)(k_1^2 + k_2^2) + k_3^2 = C. \quad (20)$$

Зауважимо, що максимальне значення комбінації КІН (20) обернено пропорційне до граничнодопустимого навантаження тіла з тріщиною, при якому починається поширення тріщини.

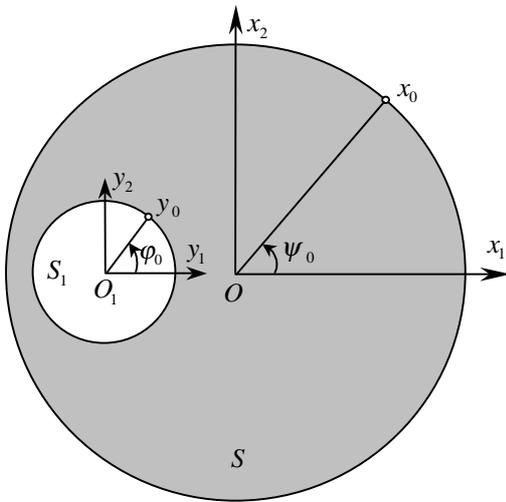


Рис. 2

6. Числові результати

Розглянемо тріщину у вигляді ексцентричного кільця, яка перебуває в полі постійних зсувних зусиль, направлених вздовж осі Ox_1 (рис. 2). $N_1^*(x) = const$, $N_2^*(x) = 0$, $N_3^*(x) = 0$. Нехай координати центра перемички в базовій системі координат рівні $(-d; 0; 0)$. Відношення радіусів внутрішнього та зовнішнього контурів тріщини вибрано $a_1/a = 0,5$.

На рис. 3 показана залежність граничнодопустимих навантажень тіла, при якому починається поширення тріщини на її зовнішньому та внутрішньому контурах. Величини граничнодопустимих навантажень для обох контурів тріщини віднесені до граничнодопустимого навантаження тіла, що містить кругову тріщину радіуса a , яка перебуває під дією аналогічного навантаження.

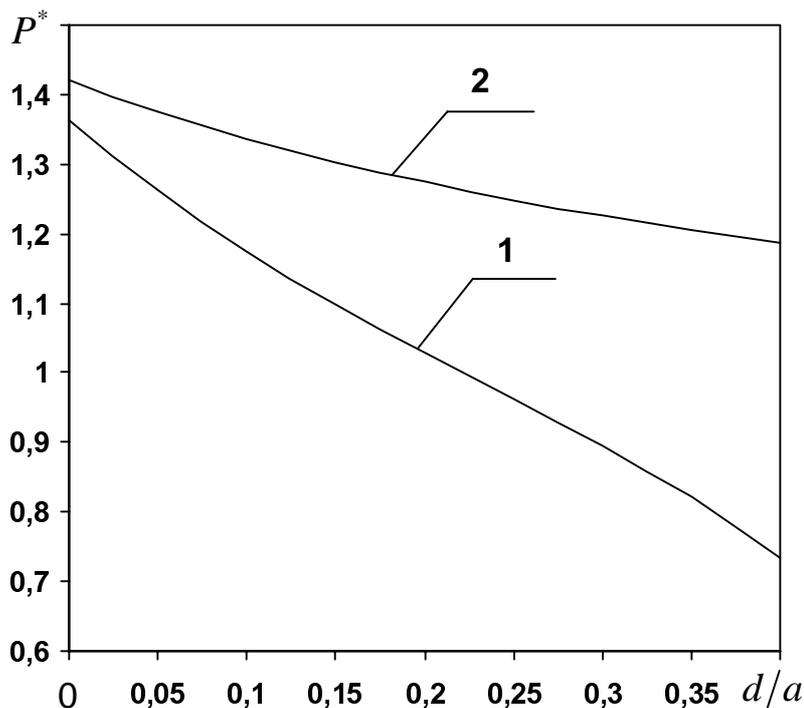


Рис. 3

$$P^* = \sqrt{\frac{\max_{\psi_0} [(1-\nu)[k_2^*(\psi_0)]^2 + [k_3^*(\psi_0)]^2]}{\max_{\varphi} [(1-\nu)k_2^2(\varphi) + k_3^2(\varphi)]}}, \quad (21)$$

де $k_2^*(\psi_0)$ і $k_3^*(\psi_0)$ – коефіцієнти інтенсивності напружень кругової тріщини радіуса a , що перебуває під дією постійних зсувних зусиль.

$$k_2^*(\psi_0) = \frac{4}{2-\nu} N_1^0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cos \psi_0; \quad k_3^*(\psi_0) = -\frac{4(1-\nu)}{2-\nu} N_1^0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sin \psi_0.$$

Крива 1 відповідає внутрішньому контуру тріщини, а крива 2 – зовнішньому. Приведені числові дані в частковому випадку симетричного кільця добре узгоджуються з відомими в літературі результатами [7, 8, 11].

7. Висновки

1. Якщо до берегів тріщини у вигляді ексцентричного кільця прикладені постійні зсувні зусилля, то ймовірною точкою початку поширення тріщини є точка внутрішнього контуру, що відповідає значенню $\varphi_0 = \pi$.

2. Найбільша концентрація напружень в околі зовнішнього контуру тріщини спостерігається при $\psi_0 = 0$.

3. Із збільшенням ексцентричності області тріщини ймовірність початку поширення тріщини зростає при одному і тому ж навантаженні.

4. Як бачимо з рис. 3, при співвідношенні радіусів контурів тріщини $a_1/a = 0,5$ та значеннях ексцентричності $d/a < 0,22$ тіло, що містить таку кільцеву тріщину, має більший запас міцності при зсуві поверхонь тріщини, ніж аналогічне тіло, послаблене круговою тріщиною радіуса a .

1. Кит Г.С., Хай М.В. *Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами.* – К.: Наук. думка, 1989. – 284 с. 2. Хай М. В. *Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения.* – К.: Наук. думка, 1993. – 254 с. 3. Антипов Ю.А. *Асимптотическое решение смешанных задач математической физики со сменой граничных условий по кольцу*// *Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела.* – 1989. – № 3. – С. 51–58. 4. Кит Г.С., Хай М.В. *О решении задач теории упругости для тела с плоской трещиной, занимающей двухсвязную область* // *Докл. АН УРСР. Сер. А.* – 1980. – № 3. – С. 58–61. 5. Саврук М.П. *Кoeffициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами.* – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. (*Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. Т. 2*). 6. Сметанин Б.И. *Задача о растяжении упругого пространства, содержащего плоскую кольцевую щель* // *Прикл. математика и механика.* – 1968. – 32, № 3. – С. 458–462. 7. Шишканова С.Ф. *О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к кольцевой* // *Прикл. мех.* – 1990. – 26, № 5. – С. 9-15. 8. Хай М.В., Стасюк Б.М. *Про визначення напружень в околі плоских неоднорозв'язних тріщин, які знаходяться в полі зсувних зусиль* // *Доповіді НАН України.* – 1998. – № 6. – С. 70–74. 9. Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения.* – М.: Наука, 1974. – 640 с. 10. Hara T. *The effect of shear on the infinite elastic solid with an annular crack* // *Bull. JSME.* – 1980. – 23, № 180. – P. 815–821. 11. Mastrojannis E.N., Kermanidis T.B. *An approximate solution of the annular crack problems* // *Int. J. Number. Meth. Eng.* – 1981. – 17, № 11. – P. 1605–1611.