

Вимірювання мікротвердості та мікротермо-ЕРС показали, що глибина дифузійного насичення і кількість інтерметалідної фази максимальні при нанесенні покриття по ступінчастому режиму 5. Прикладом може бути нанесення по різних температурних режимах паладію (рис. 1) і ренію (рис. 2). Крім того, у всіх випадках при отриманні покриття з використанням нового способу (режим 6) при інших рівних умовах вдається підвищити вміст цього елемента в покритті. Наприклад, при отриманні ренієвого покриття використання як дифузанта замість чистого ренію солі  $K_2ReCl_6$  дає змогу підвищити концентрацію ренію в покритті. При цьому утворюється додаткова кількість інтерметалідної фази, що збільшує мікротвердість дифузійної зони (рис. 3) і межу міцності зразків (табл. 2).

Використання високотемпературного режиму 2 також дозволяє отримати задовільне за якістю покриття. Однак використання високих температур від'ємно відбивається на технологічності процесу. Використання термоступінчастого режиму 5 дає можливість зменшити термічні напруження як в самому покритті, так і на межі покриття – матриця. Цей методичний прийом створює більш сприятливі умови і для формування перехідної зони при покращанні загальної технологічності процесу. Тому надалі найкращі характеристики жаростійкості і жароміцності отримані на зразках, які піддавалися дифузійному насиченню по термоступінчастому режиму 5. З випробуваних транспортних розплавів найкращі результати отримані при насиченні в розплаві літію.

УДК 517.9+534.111

Б.І. Сокіл, А.М. Сліпчук

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра теоретичної механіки

## НЕЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО РУХОМОГО КАНАТУ І МЕТОДИ ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

© Сокіл Б.І., Сліпчук А.М., 2003

**У межах уточненої моделі розглядаються поперечні коливання одновимірних пружних систем (канату, струни, линви), які рухаються уздовж своєї недеформованої осі з постійною швидкістю. Отримано диференціальне рівняння, яке описує динамічні процеси у зазначених одновимірних системах; запропоновано методику його дослідження. Вона дає отримати залежності для визначення впливу фізико-механічних і кінематичних характеристик системи на амплітуду і частоту її коливань.**

**In borders of the specified model the cross fluctuations of one-measurable elastic systems (rope, string, tow) are considered(examined) which move along the not deformed axis with constant speed. The differential equation is received which is described dynamic processes in specified one-measurable by(with) system; is offered, for certain(determined) of the assumptions, technique of his(its) research, which permits to receive dependences, which define(determine) influence physico-mathematical and kinematic of the characteristics of system on its(her) amplitude and frequency of fluctuations.**

Динамічні процеси, що відбуваються в одновимірних лінійно пружних системах з незмінними геометричними і фізико-механічними характеристиками вивчені у достатньою

мірою у випадку, якщо така система не рухається уздовж своєї геометричної осі [1,2]. Однак багато практичних задач (підвісні канатні дороги, конвеєрні лінії, пристрої для витяжки і намотування дроту ін.) вимагають під час їх розв'язання уточнених підходів дослідження впливу руху на динаміку процесу. Динамічні процеси у пружних рухомих одновимірних системах описати математично уже значно важче. Це зв'язано з інтегруванням диференціальних рівнянь, що описують їх рух. Крім того, у більшості випадків при розгляді вказаного типу задач не враховуються пружні властивості середовища, що призводять до видовження канату. Нижче розглядається більш складна задача, яка поєднує вказані фактори: середовище рухається уздовж своєї осі з постійною швидкістю і враховується його лінійне подовження.

### 1. Постановка задачі

Вказані вище механічні системи будемо вивчати на прикладі однорідного пружного канату з постійним поперечним перерізом. Для того щоб одержати диференціальне рівняння, що описує динамічний процес в такому пружному одновимірному середовищі, введемо такі позначення:

$F$  – площа поперечного перерізу каната;  $S(x)$  – натяг канату в перерізі з координатою  $x$ ;  $m$  – маса одиниці довжини канату;  $E$  – модуль пружності.

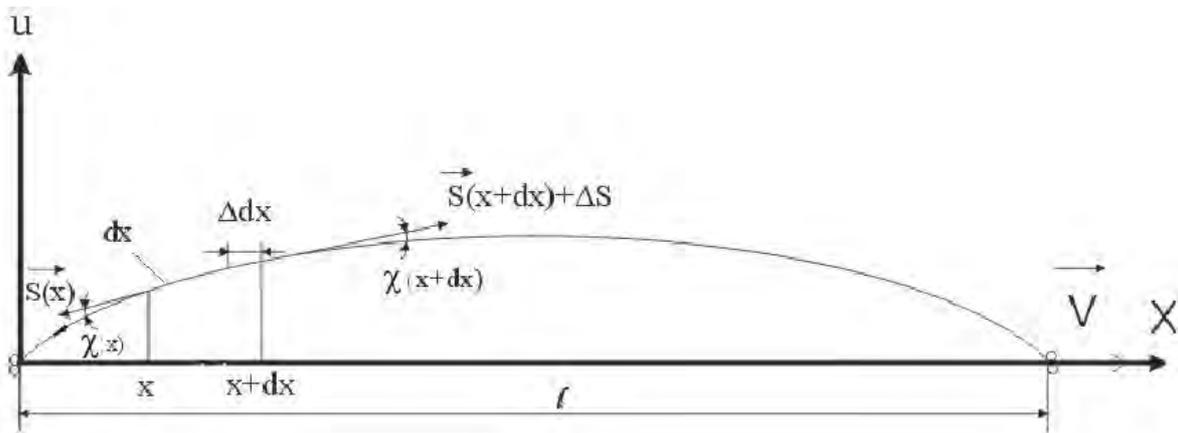


Рис. 1. Розрахункова модель і схема сил, що діють на елементарну довжину струни

Виберемо нерухому систему координат  $XOY$ , початок якої збігається з лівим кінцем, а вісь  $OX$  збігається з недеформованим його положенням (рис. 1).

Позначимо:  $u(x, t)$  – переміщення перерізу каната з координатою  $x$  в довільний момент часу  $t$  в напрямку, перпендикулярному до осі  $OX$ ;  $\Delta S$  – додатковий натяг канату зумовлений подовженням ділянки завдовжки  $dx$ ;  $\Delta dx$  – зміна довжини елемента каната під час коливань ( $\Delta dx = dx - dx \cos \chi \approx dx \frac{\chi^2}{2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = u' \approx \chi$ );  $R\left(u, \frac{du}{dt}\right) dx$  – рівнодійна сил опору і інших дисипативних сил, які діють на елемент каната завдовжки  $dx$ . Відносна деформація  $\frac{\Delta dx}{dx}$  по всій довжині каната також буде незмінною, адже величина натягу каната постійна, а загальне його подовження обчислюється за формулою

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx . \quad (1)$$

Додатковий натяг каната, зумовлений його подовженням, дорівнює

$$\Delta S = \frac{EF}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2)$$

використовуючи для умовно виділеного елемента завдовжки  $dx$  принцип Даламбера в проекції на вісь ОУ, одержимо

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = (S + \Delta S) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - R \left( u, \frac{du}{dt} \right), \quad (3)$$

$$\text{де } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x}.$$

Для випадку струни, яка рухається уздовж осі ОХ із сталою швидкістю символи першої  $\frac{d}{dt}$  і другої похідної за часом  $\frac{d^2}{dt^2}$  визначаються залежностями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} = V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx}{dt} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2V \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $V$  – горизонтальна швидкість руху канату.

Підставляючи (1), (2), (4) у диференціальне рівняння (3), одержуємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{EF}{2ml} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - V^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{m} R \left( u, \frac{du}{dt} \right), \quad (5)$$

$$\text{де } \alpha^2 = \frac{S}{m}.$$

Отже, динамічні процеси у пружному канаті, який рухається вздовж своєї геометричної осі із сталою швидкістю, описується диференціальним рівнянням (5).

## 2. Методика дослідження

Для вивчення впливу додаткового подовження, а також руху канату на амплітудно-частотну характеристику його коливань будемо вважати:

а) у точках А і В відсутнє переміщення канату у напрямку осі ОУ, а це означає, що для диференціального рівняння (5) спостерігаються крайові умови

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = u(x, t) \Big|_{x=l} = 0; \quad (6)$$

б) величина додаткового натягу канату зумовлена його видовженням є малою порівняно із початковим натягом на його кінцях (це дозволяє стверджувати, що  $\Delta S \ll S$ , а отже,  $\alpha^2 \gg \frac{EF}{2ml}$ );

в) сили опору та дисипативні сили є малими порівняно із натягом канату;

г) швидкість переміщення канату вздовж осі ОХ є незначною:  $V \ll \alpha$ .

Наведені допущення дозволяють стверджувати, що максимальна величина правої частини диференціального рівняння (5) є значно меншою від величини коефіцієнта  $\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

а значить, для дослідження розв'язку рівняння (5) можна використати асимптотичні методи нелінійної механіки [3,4]. Згідно із останнім розглянемо спочатку крайову задачу для незбуреного рівняння (5), тобто рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (7)$$

при крайових умовах (6).

Одночастотні розв'язки рівняння (7) при однорідних крайових умовах (6) набирають вигляду

$$u(x,t) = \sin \frac{k\pi x}{l} T(\omega t + \varphi), \quad k=1,2,\dots \quad (8)$$

де  $\varphi$  – стала, яка, як і функція  $T(\omega t + \varphi)$ , визначається залежно від початкових умов,  $\omega = \frac{k\pi}{l} \alpha$ .

Треба відзначити, що система функцій  $\{X_k(x)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$  має властивість повноти і ортонормованості. Остання властивість функцій, які описують форми коливань незбуреної крайової задачі, значно спрощує процедуру знаходження впливу додаткового подовження; швидкості руху та дисипативних сил на динаміку одно частотного процесу каната. Відомо [4], що наявність сил опору та інших дисипативних сил у нелінійних механічних системах із багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами є причиною згасання коливань із вищими частотами і встановлення у них коливань із одною частотою, яка у більшості випадків близька до першої основної частоти частотного спектра. Тому знайдемо співвідношення, які визначають закони зміни амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) коливань каната у формах, близьких до першої основної частоти незбуреної системи. Для цього, помноживши обидві частини диференціального рівняння (5) на  $\sin \frac{\pi}{l} x$  і зінтегрувавши отримані вирази в межах від 0 до  $l$ , отримаємо звичайне нелінійне диференціальне рівняння

$$\ddot{T} + \alpha^2 \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 T = v^2 \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 T - \beta T^3 - r(T, \dot{T}), \quad (9)$$

де  $\beta = \frac{EF l}{4\pi}$ ,  $r(T, \dot{T}) = \frac{2}{l} \int_0^l F \left( aT \sin \frac{\pi x}{l}, a\dot{T} \sin \frac{\pi x}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx$ .

Перше наближення асимптотичного розв'язку останнього рівняння, як впливає із [2], має вигляд

$$T = a \left( 1 - \frac{3\beta}{4} a^2 \right) \cos \psi - \frac{\beta a^3}{4} \cos 3\psi + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi}{n^2 - 1}, \quad (10),$$

де  $a_n, b_n$  – коефіцієнти розкладу функції рівняння  $r(T, \dot{T})$  у ряд Фур'є, а співвідношення визначають закони зміни амплітуди  $a$  і фази коливань  $\psi$  визначаються диференціальними рівняннями:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} r(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \left( \frac{3\beta\pi^4 a^2}{8\omega l^4} - \frac{\gamma^2 \pi^2}{2\omega l} \right) - \frac{1}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} r(T, \dot{T}) \cos \psi d\psi. \quad (11)$$

Отже, одночастотні коливання каната описуються залежністю (10), в якій  $\alpha$  і  $\psi$  визначаються диференціальним рівнянням (11).

### 3. Приклад

Розглянемо вплив подовження і швидкості руху каната на частоту його власних коливань, тобто розглянемо диференціальне рівняння (5) для випадку  $r(T, \dot{T}) \equiv 0$ . Тоді, як випливає із (11), АФХ власних коливань каната описується залежністю:

$$\frac{da}{dt} = 0$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \left( \frac{3\beta\pi^4 a^2}{8\omega l^4} - \frac{\gamma^2 \pi^2}{2\omega l} \right). \quad (12)$$

Як і слід було чекати, амплітуда коливань системи залишається незмінною, адже система є консервативною. Що стосується частоти власних коливань каната, то вона залежить як від швидкості руху (параметра  $\gamma$ ), так і від амплітуди (початкових умов).

Нижче на графіках (рис. 1 – рис. 3) наведені залежності частоти власних коливань від амплітуди, швидкості руху, натягу каната:

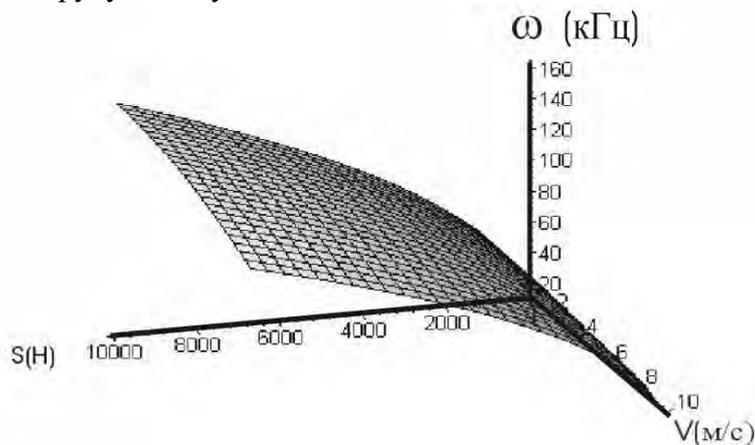


Рис. 1. Залежність частоти власних коливань каната від натягу та швидкості

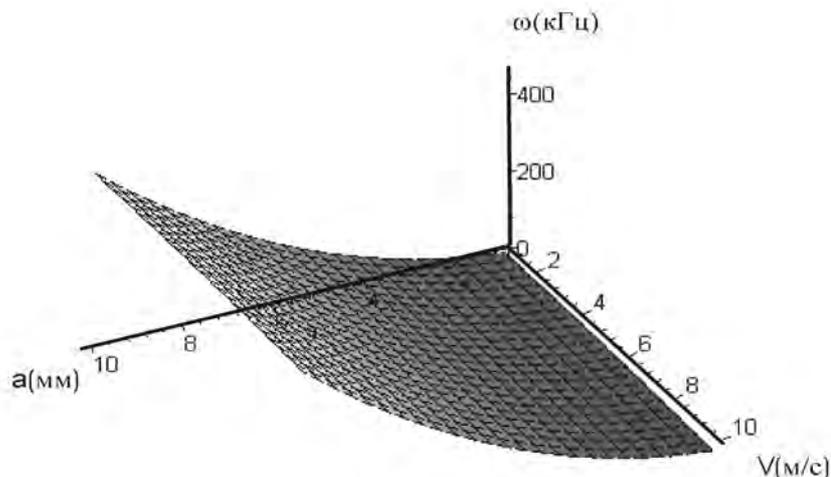


Рис. 2. Залежність частоти власних коливань каната від амплітуди та швидкості

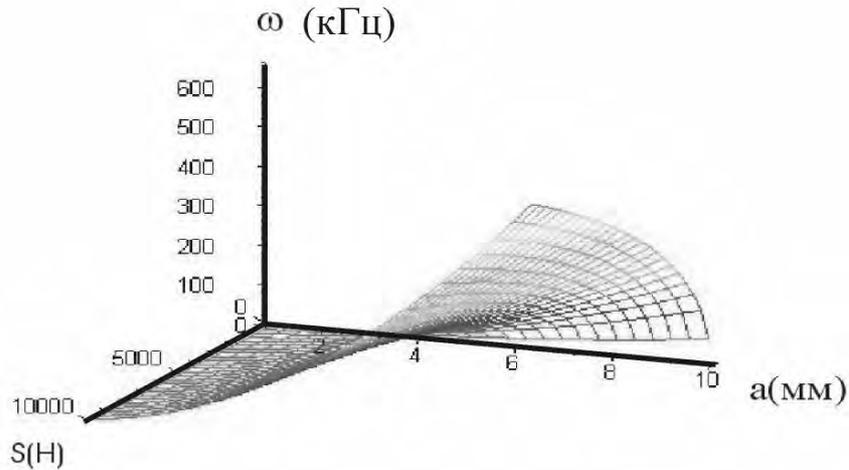


Рис. 3. Залежність частоти власних коливань каната від натягу та амплітуди

На основі отриманих аналітичних і графічних залежностей впливає:

*по-перше:* врахування видовження каната призводить до того, що розрахункова частота його власних коливань стає більшою порівняно із власною частотою у лінійній постановці;

*по-друге:* якщо у лінійній постановці частота (період) коливань каната залежить лише від його початкового натягу і густини, то у нелінійній як від фізико-механічних властивостей матеріалу канату, так і амплітуди коливань, причому із збільшенням початкової амплітуди коливань частота збільшується;

*по-третє:* що стосується швидкості руху каната, то вона у розглядуваній постановці задачі менше впливає на частоту власних коливань.

1. Найфэ А. Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с. 2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с. 3. Гащук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с. 4. Митропольский Ю.А., Мосеєнков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 592с.