

УДК 621.1

І.В. Кузьо, І.П. Смерека, Я.А. Зінько  
 Національний університет „Львівська політехніка“,  
 кафедра теоретичної механіки

## СПЕЦІАЛЬНІ Ateb-ФУНКЦІЇ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ КЕРОВАНИХ РУХІВ

© Кузьо І.В., Смерека І.П., Зінько Я.А., 2003

**На основі гіперболічних Ateb-функцій запропоновано методикку розв'язання задач оптимального керування рухом матеріальних об'єктів при дії на них суттєво нелінійного лобового опору. Розглянуто приклад оптимального розгону матеріального об'єкта.**

**On the basis of the methods of hyperbolic Ateb-functions the ways of solving the problems of optimal motion directing of material objects influenced by some essentially non-linear front resistance have been suggested. An example of optimal starting point of same material objects has been shown.**

Серед різновидностей задач механіки руху об'єктів значне місце посідають випадки, в яких об'єкт керування знаходиться в стані неперервного руху і змінюється під дією різних зовнішніх і внутрішніх факторів. Детально питання руху і управління таких об'єктів з лінійними і квазілінійними характеристиками силових факторів розглянуті в роботах Бельмана Р., Кумзака Г. Є., Лебедева В. М., Мойсеева М. М. і інших авторів. В роботах цих авторів, зокрема розглянуті задачі оптимального переведу об'єкта із початкового фазового стану в кінцеве за допомогою керуючої функції тяги.

Тут розглядається задача оптимального керування рухом літального апарату з врахуванням суттєво нелінійної характеристики зовнішнього опору.

Рух центра мас такого об'єкта під дією сили тяги і лобового опору може бути записано диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; \\ M\dot{y} &= P(t) - \beta y^\mu, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $M$  – маса об'єкта;  $x(t)$ ,  $y(t)$  – переміщення і швидкість об'єкта;  $\beta y^\mu$  – лобовий опір середовища;  $\beta$  – коефіцієнт лобового опору;  $\mu = \frac{v_1 + v_1 + 1}{2v_1 + 1}$  ( $v_1, v_2 = 0, 1, 2, \dots$ );  $P(t)$  – сила тяги.

Розглядається випадок руху об'єкта сталої маси під дією сили тяги, викликаної двигуном обмеженої потужності, для якого  $P_{\min} \leq P(t) \leq P_{\max}$ .

Задача оптимального керування рухом об'єкта є варіаційною задачею, яка полягає у побудові оптимального закону зміни сили тяги, що забезпечує мінімум інтегрального функціонала для заданого динамічного маневру

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T P^2(t) dt. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0; & x(T) &= x_k; \\ y(0) &= y_0; & y(T) &= y_k, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $x_0$  і  $y_0$  – початкові, а  $x_k$  і  $y_k$  – кінцеві значення шляху  $x$  і швидкості  $y$ ;  $T$  – час руху.

Знайшовши із формули (1)  $P(t)$  і підставивши його у функціонал (2), поставлена задача набере вигляд

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [M\dot{y} + \beta y^\mu]^2 dt; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0; & x(T) &= x_k; \\ y(0) &= y_0; & y(T) &= y_k. \end{aligned} \quad (5)$$

Отже, динамічна (траєкторна) частина задачі зводиться до мінімізації інтегрального функціонала (4), внаслідок реалізації якої отримуємо експериментальні криві  $x(t)$  і  $y(t)$ , які задовольняють початкові і граничні умови.

За знайденими експериментальними кривими  $x(t)$  і  $y(t)$  знаходиться оптимальне значення керуючої сили тяги  $P(t)$ , яка переводить об'єкт за час  $T$  із початкового положення в кінцеве.

Підінтегральна функція функціонала (4) задовольняє умови теореми Ейлера і диференціальне рівняння екстремальних розв'язків має вигляд

$$\ddot{y} - K^2 \mu y^{2\mu-1} = 0, \quad (6)$$

де  $k = \frac{\beta}{M}$ .

Розв'язок суттєво нелінійного диференціального рівняння (6) представляється через гіперболічні (аперіодичні) Атеб-функції [3].

$$\begin{aligned} y(t) &= a \cdot cha(m, 1, \psi); \\ \dot{y}(t) &= a^\mu k \cdot sha(1, m, \psi). \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $\psi = \mu k a^{\mu-1} t + \psi_0$ ;  $m = 2\mu - 1$ ;  $a$  і  $\psi_0$  – сталі величини;  $cha(m, 1, \psi)$  і  $sha(1, m, \psi)$  – гіперболічні Атеб-функції, що задовольняють умови

$$\begin{aligned} \frac{d \cdot cha(m, 1, \psi)}{d\psi} &= \frac{1}{\mu} sha(m, 1, \psi); \\ \frac{d \cdot sha(1, m, \psi)}{d\psi} &= cha(1, m, \psi); \end{aligned} \quad (8)$$

$$[cha(m, 1, \psi)]^{2\mu} - [sha(1, m, \psi)]^2 = 1.$$

Підставляючи вирази (7) у рівняння (1), визначаємо оптимальне значення функції тяги.

$$P(t) = \beta a^\mu [sha(1, m, \psi) + [cha(m, 1, \psi)]^\mu]. \quad (9)$$

Враховуючи, що  $\dot{x} = y$ , після інтегрування знаходимо закон оптимального руху

$$x(t) = a \int_0^t cha(m, 1, \psi) dt + C_1. \quad (10)$$

Сталі інтегрування  $C_1$ ,  $a$  і  $\psi_0$  знаходимо із початкових і граничних умов при  $t = 0$  і  $t = T$ :

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1; \\ y(0) &= a \cdot cha(m, 1, \psi_0); \\ y(T) &= a \cdot cha(m, 1, \psi(T)), \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\psi(T) = \mu k a^{\mu-1} T + \psi_0$ .

На практиці часто зустрічаються такі задачі керування рухом:

**1. Задача розгону.** Потрібно розігнати або загальмувати об'єкт таким чином, щоб у момент часу  $T$  його швидкість набувала значення  $y_k$ .

Значення координати  $x_k$  у кінці проміжку керування  $[0, T]$  у цьому випадку не цікавить.

**2. Задача проведення.** Потрібно, щоб об'єкт у момент часу  $T$  прийшов у точку з координатою  $x_k$ , значення швидкості  $y_k$  при цьому не цікавить.

**3. Задача зближення.** Потрібно привести об'єкт у точку з координатою  $x_k$  так, щоб його швидкість у момент зближення дорівнювала  $y_k$ .

**4. Задача зближення в часі.** Потрібно привести об'єкт у задану точку в заданий момент часу і з певною швидкістю.

Отримані вище результати дають можливість однозначно розв'язати перші дві задачі.

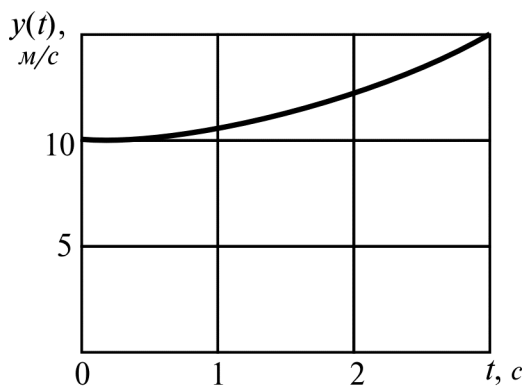


Рис. 1. Зміна швидкості руху

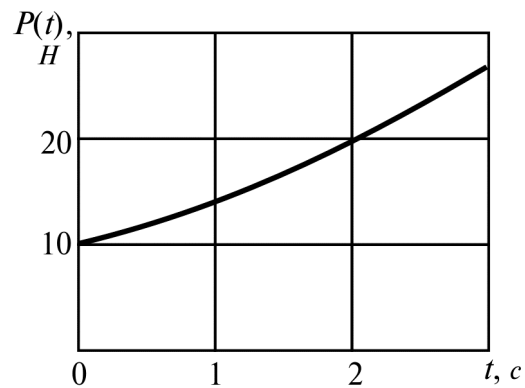


Рис. 2. Зміна оптимальної тяги

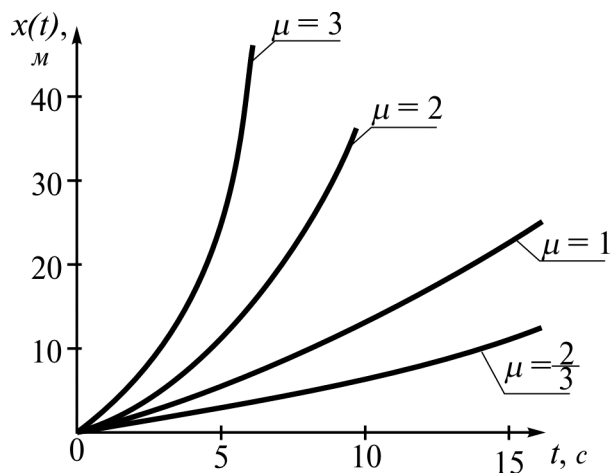


Рис. 3. Графік залежності руху з часом при різних  $\mu$

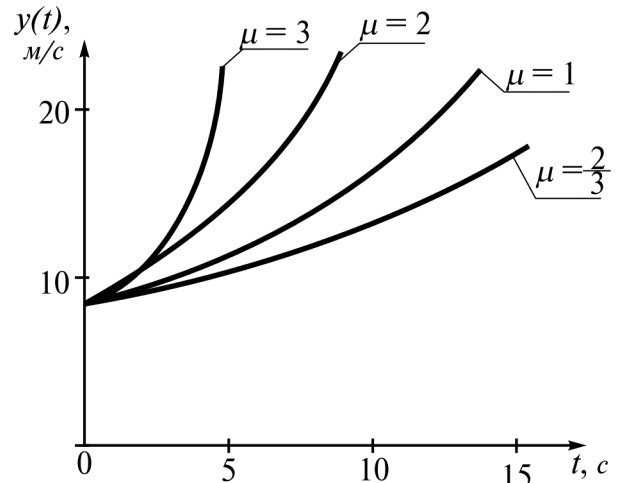


Рис. 4. Графік зміни швидкості з часом при різних  $\mu$

Приклад задачі розгону. Нехай  $M = 1$  кг.;  $\mu = 2$ ;  $\beta = 0,1$ ;  $T = 3$ ;  $x(0) = 0$ ;  $y(0) = 10$  м/с;  $\dot{y}(0) = 0$ ;  $y(T) = 15$  м/с;

Тоді на основі отриманих залежностей будемо мати:  $K = 0,1$ ;  $a = 10$ ;  $\psi_0 = 0$ ;  $\psi(T) = 6$ .

На основі формул (7) і (9) на рис. 1 і 2 побудовані графіки зміни швидкості руху  $y(t)$  і сили тяги  $P(t)$ ;

На рис. 3, 4 і 5 приведені графіки залежностей руху  $x(t)$ , швидкості  $y(t)$  і функції тяги  $P(t)$  від часу при різних значеннях параметра нелінійності  $\mu$ . Графіки побудовані для випадку коли  $M = 1$  кг;  $\beta = 0,1$ ;  $x(0) = 0$ ;  $y(0) = 1$  м/с;  $\dot{y}(0) = 0$ .

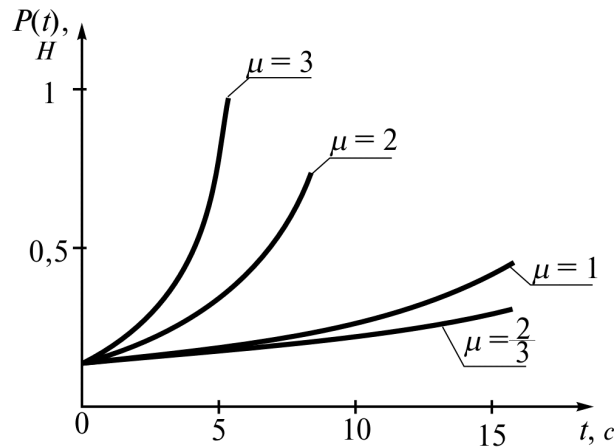


Рис. 5. Зміна оптимальної сили з часом при різних  $\mu$

На закінчення зауважимо, що гіперболічні Ateb-функції можуть бути застосовані і для дослідження оптимальних керованих рухів і в системах з врахуванням як в'язкого, так і сухого тертя

1. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. – М.: Наука, 1964. – 359 с.
2. Кумзак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. – М.: Наука, 1976. – 744 с.
3. Сенник П.М. Про Ateb-функції. – Докл. АН УРСР – Сер. А. – 1968. – № 1. – С. 23–27.

УДК 629.113-59.001.4

М.М. Осташук

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра автомобілебудування

## ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ГРАДІЄНТІВ У ПАРАХ ТЕРТЯ АВТОМОБІЛЬНИХ ДИСКОВИХ ГАЛЬМ НА ТРИВИМІРНИХ ТЕПЛОВИХ МОДЕЛЯХ

© Осташук М.М., 2003

**Викладені результати порівняльних досліджень температурних градієнтів у різних парах тертя автомобільних дискових гальм при випробуваннях II, отримані комп'ютерним моделюванням.**

**The results of comparative studies of temperature gradients in different friction pairs of automobile disk brakes during Tests II are presented. They were obtained through computer simulation.**

Відомо [ 1 ], що, крім температури поверхні тертя, на коефіцієнт тертя великий вплив спричиняє температурний градієнт. При цьому коефіцієнт тертя, а отже, і коефіцієнт ефективності гальмового механізму, зростають зі збільшенням температурного градієнта і