

УДК 539.3

С.А. Дубецький

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра вищої математики

ТИСК КРУГОВОГО ШТАМПА ЧЕРЕЗ ПЛАСТИНКУ НА ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР

© Дубецький С.А., 2003

Досліджено напружено-деформований стан в круговій пластині, яка втискається в пружний півпростір круговим штампом. Задача зведена до системи рівнянь відносно параметрів, які характеризують геометрію взаємодії штампа, пластинки і півпростору залежно від силового фактора. Представлено залежності зони контакту від розмірів штампа та пластинки.

The article is devoted to investigation of strain-stress state in a circular plate, which is pressed into elastic half-space by a circular stamp. The task is reduced to system of the equations concerning parameters, which characterize interaction of a stamp, plate and half-space depending on the force factor. The dependences of contact zone on the sizes of a stamp and plate are presented.

Постановка проблеми та завдання дослідження

При проектуванні нових машин і механізмів у багатьох випадках необхідно знати розподіл напружень і деформацій в проміжних контактуючих елементах конструкцій. Важливе значення для інженерної практики мають розв'язки контактних задач теорії пружності для тіл з круговими границями. Враховуючи велике прикладне значення таких задач, виникає потреба в розробці інженерних підходів до розрахунку на міцність і жорсткість конкретних з'єднань і деталей машин. Завданням дослідження у цій роботі є встановлення залежностей між контактними напруженнями і геометричними параметрами при тиску кругового штампа через пластину на пружний півпростір.

Аналіз стану питання

Сьогодні найповніше висвітлені задачі про тиск штампа або систем штампів на границю пружного півпростору [1–3]. Проте практично відсутні розв'язки подібних задач за наявності між штампамі і півпростором проміжних елементів [4, 5].

Метою роботи є отримання аналітичних співвідношень і числових результатів для оцінки взаємодії кругової пластинки з пружним півпростором залежно від розмірів штампа та механічних характеристик пластинки.

Науково-методичні підстави дослідження

Нині широко розроблені методи розв'язування контактних задач про тиск кругового штампа на пружний необмежений шар, який лежить на жорсткій або пружній основі. При розв'язуванні цих задач найбільш вживаними є асимптотичні методи відносно безрозмірного параметра $\lambda = h/r_0$, де h – товщина шару, r_0 – радіус основи штампа. Розв'язки подібних задач, зокрема для системи штамп – обмежена пластинка – пружний півпростір, практично відсутні. Тому назріла потреба проведення досліджень саме такого класу задач.

Результати досліджень

Розглянемо пружний півпростір і введемо циліндричну систему координат Orz таким чином, щоб площина $z=0$ збігалася з граничною площиною півпростору. Нехай на границі півпростору $z=0$ лежить кругова пружна пластинка завтовшки h , в яку втискається під дією осової сили F круговий в плані жорсткий штамп з радіусом основи r_0 . Центри основи штампа і пластинки лежать на осі симетрії (рис.1). Вважаємо, що тертя між штампом і пластинкою, а також між пластинкою і півпростором відсутнє. Внаслідок втискання штампа пластинка здеформується і займе положення, зображене на рис. 2.

Граничні умови даної осесиметричної контактної задачі мають вигляд

$$\tau_{rz}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{rz}|_{z=-h} = 0, \quad u_z|_{z=0} = \delta + w(r), \quad (1)$$

де δ – вертикальне зміщення пластинки, $w(r)$ – крива, що визначає конфігурацію пластинки внаслідок деформування.

Диференціальне рівняння прогину пластинки є таким:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{\sigma_z}{D}, \quad (2)$$

де u_z – переміщення точок пластинки, σ_z – нормальні напруження, які виникають в пластинці, D – жорсткість пластинки.

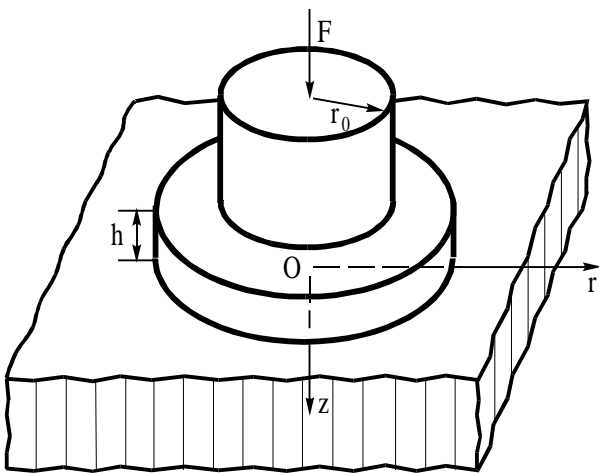


Рис. 1. Схема навантаження півпростору штампом через пластинку

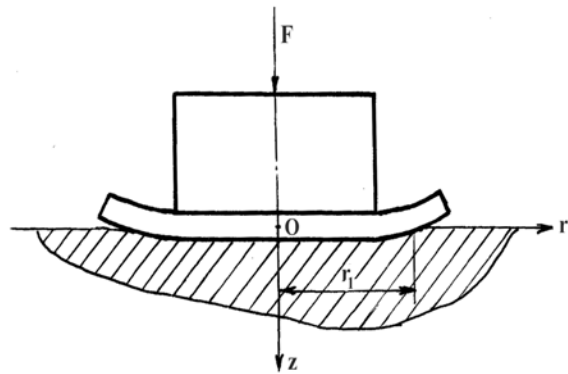


Рис. 2. Профіль здеформованої пластинки

Напруження σ_z визначаються згідно з [2] за формулою

$$\sigma_z|_{z=0} = -\frac{2G}{\pi(1-\nu)} \left\{ \left[\delta + r_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} w'(r_1 \sin\theta) d\theta \right] \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - r^2}} + \int_r^{r_1} \frac{d^2}{dt^2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin\theta \cdot w(t \sin\theta) d\theta \right] \frac{dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right\}, \quad (3)$$

де r_1 – радіус зони контакту пластинки з півпростором, G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона.

Прогин пластинки $w(r)$ будемо шукати у вигляді

$$w(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < r_0), \\ k(r - r_0)^2 & (r_0 < r < r_1), \end{cases} \quad (4)$$

де k – невідомий коефіцієнт.

Використовуючи вираз (4) при заміні змінних $x = t \sin \theta$, рівняння (3) набере вигляду

$$\sigma_z = -\frac{2G}{\pi(1-\nu)} \left\{ \left[\delta + r_1 \int_{r_0}^{r_1} \frac{2k(x-r_0)}{\sqrt{r_1^2-x^2}} dx \right] \frac{1}{\sqrt{r_1^2-r^2}} + \int_r^{r_1} \frac{d}{dt} \left[t \int_0^t \frac{2k(x-r_0)}{\sqrt{t^2-x^2}} dx \right] \frac{dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \right\}. \quad (5)$$

Підставимо вирази для складової прогину $w(r)$ і для напружень σ_z у рівність (2) після обчислень інтегралів у рівнянні (5). Тоді одержимо співвідношення між переміщеннями пластинки і напруженнями в ній:

$$2k \frac{r_0}{r^3} = \frac{2G}{\pi D(1-\nu)} \left\{ \frac{\delta}{\sqrt{r_1^2-r^2}} + \frac{2kr_1}{\sqrt{r_1^2-r^2}} \left[\sqrt{r_1^2-r_0^2} - r_0 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r_0}{r_1} \right) \right] \right\} + 2k \left(2\sqrt{r_1^2-r^2} - \frac{\pi}{2} r_0 \ln \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2-r^2}}{r} \right). \quad (6)$$

Останнє співвідношення справедливе у всіх точках контакту пластинки з півпростором. Використаємо його для визначення невідомого коефіцієнта k і радіуса зони контакту r_1 . При $r = r_0$, $r = r_1$ одержимо систему двох рівнянь

$$2k \left[\frac{\pi D(1-\nu)}{2G} \frac{1}{r_0^2} \sqrt{r_1^2-r_0^2} - r_1 \left(\sqrt{r_1^2-r_0^2} - r_0 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r_0}{r_1} \right) \right) - \sqrt{r_1^2-r_0^2} \left(2\sqrt{r_1^2-r_0^2} - \frac{\pi}{2} r_0 \ln \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2-r_0^2}}{r_0} \right) \right] = \delta, \quad (7)$$

$$2kr_1 \left[-\sqrt{r_1^2-r_0^2} + r_0 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r_0}{r_1} \right) \right] = \delta.$$

Підставивши замість параметрів D і G відомі залежності $\left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$, отримуємо два рівняння: перше – для знаходження радіуса зони контакту r_1 залежно від товщини пластинки h

$$2\sqrt{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 1} - \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 1} \right) = \frac{\pi}{12} \left(\frac{h}{r_0} \right)^3 \quad (8)$$

а друге – коефіцієнта k :

$$k = \frac{\delta}{2r_0^2} \left(\frac{r_1}{r_0} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r_0}{r_1} \right) - \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 - 1} \right)^{-1}. \quad (9)$$

При відомих k і r_1 можна обчислити контактні напруження σ_z з рівності

$$\sigma_z = -\frac{2G}{\pi D(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}} \left(\delta + 2kr_0 \left[\sqrt{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 1} - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r_0}{r_1}\right) \right] \right) + \right. \\ \left. + 2kr_0 \left(2\frac{r_1}{r_0} \sqrt{1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2} - \frac{\pi}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}}{\frac{r}{r_1}} \right) \right\} \quad (r_0 < r < r_1). \quad (10)$$

На рис. 3 подані результати розв'язання трансцендентного рівняння (8).

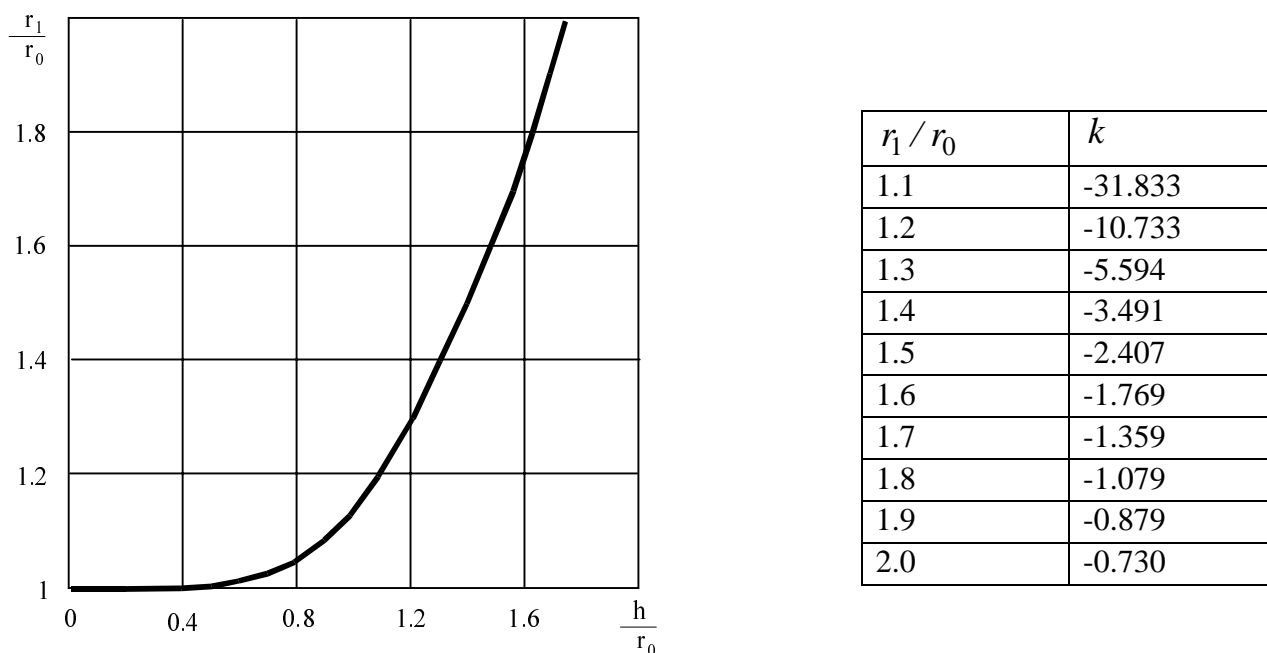


Рис. 3. Залежність розмірів зони контакту від товщини пластинки

Висновки. На основі розрахунків видно, що при малій товщині пластинки зона її контакту з півпростором відхиляється від основи штампа на незначну величину. Із зростанням товщини пластинки ($h \geq r_0$) зона контакту суттєво збільшується і при $h = 1.8r_0$ становить $\approx 2r_0$.

Зігнута ділянка пластинки задовільно описується виразом параболи. Як видно з таблиці при малих товщинах пластинки визначальний коефіцієнт параболи набуває великі значення, тобто пластинка на краю контакту має велику кривизну. Із збільшенням товщини пластинки її форма стає більш пологою.

Проведені дослідження і розрахунки дають змогу підбирати оптимальні форми елементів контактуючих деталей з подібною до розглянутої схемою навантаження.

1. Дубецький С.А., Козут М.С. Тиск системи кругових та еліптичних штампів на пружний півпростір і шар// *Машинознавство*. – 2000.–№2. – С. 25–27. 2. Уфлянд Я.С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*. – М.; Л. : Наука, 1968. – 402 с. 3. Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука, 1976. – 496 с. 4. Довнорович В.И. О действии кругового в плане штампа на упругий слой конечной толщины, лежащий на жестком основании// *Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш.* – 1964. – 119. – № 2. 5. Александров В.М., Ворovich И.И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины // *Прикл. математика и механика*. – 1960.– 24. – № 2. – С. 323–334.

УДК 539

Я.І. Козіброда, Ю.Я. Петрикович

Тернопільський державний технічний університет

ім. І. Пулюя

ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОГО ЕЛЕМЕНТА ЛЕМІШНО-КОЛИВАЛЬНОГО КОПАЧА

© Козіброда Я.І., Петрикович Ю.Я., 2003

Проведено аналітичне дослідження пружного елемента лемішних викопувальних органів з пружним шатуном, які коливаються у вертикальній площині. Пружний елемент виконаний у вигляді пружини із змінним кроком. Теоретично досліджується пружний елемент, в якому власна частота не залежить від маси рухомої частини викопувального органа, тобто пружина має властивості рівночастотності.

Analytical research of an elastic element of digging out bodies with an elastic rod which change in a vertical plane is carried out. The elastic element is made as a spring with variable step. The elastic element in which own frequency does not depend on weight of a mobile part of an executive body is theoretically investigated, the spring has property of identical frequency.

Технологічний процес викопування цукрових буряків – один із трудомістких і енергомістких елементів у ланцюгу збирання коренеплодів. Тому питання створення оптимальних схем викопування і розробки на їх базі модернізованих і нових взірців викопувальних органів – актуальна задача сільського господарства.

Перспективним у цьому напрямку є розробка нових викопувальних робочих органів на базі лемішних копачів, які знайшли широке застосування як у вітчизняних, так і зарубіжних коренезбиральних машинах, проблемою розробки і створення таких робочих органів займались багато дослідників [1, 2].

Розглянемо викопувальний орган лемішного типу з ексцентриковим приводом з пружним елементом. Дослідження конструктивних елементів, кінематики та переміщення пружного елемента, як одного з основних факторів коливань робочих органів є мало