

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗОВНІШНІХ ДЖЕРЕЛ У ФАНТОМІ ЛЮДИНИ

© Яковенко Євгенія, Гоблик Віктор, 2004

Проведено оцінку точності математичної моделі розподілу електромагнітного поля мобільного радіотелефону у фантомі голови людини.

The accuracy estimation of the mathematical model for mobile phone electromagnetic field distributed in human head phantom was carried out.

Постановка проблеми

Широке використання мобільних радіотелефонів (МРТ) істотно погіршило екологічну ситуацію, що проявилось у помітному зростанні рівня електромагнітного опромінення людей. Складний характер розподілу електромагнітного поля радіотелефону в тілі людини та локалізація потужності опромінення на певних ділянках тіла викликали необхідність у побудові математичних моделей для симуляції розподілу поля.

При математичному моделюванні розподілу електромагнітного поля у фантомі людини більшість дослідників використовувала скінченно-різницевий метод у часовій зоні (СРЧЗ) через його універсальність та прозорість алгоритму. Однак при розв'язанні тривимірних задач електродинаміки цей метод вимагає обчислення шести складових електромагнітного поля з використанням часової дискретизації, що у разі великої кількості комірок пред'являє жорсткі вимоги до оперативної пам'яті та швидкодії комп'ютера і передбачає значні витрати комп'ютерного часу.

Авторами застосовано модифікований метод інтегральних рівнянь і розроблено нові математичні моделі розподілу електромагнітного поля у фантомі людини від ниткоподібного джерела струму та півхвильового вібратора. Для підвищення точності математичної моделі розподілу поля вібраторної антени у фантомі людини застосовано уточнені амплітудний та фазовий розподіли струму у півхвильовому вібраторі [1, 2].

Точність методу СРЧЗ

Широке використання методу СРЧЗ для визначення розподілу поля МРТ у різних типах фантомів людини робить доцільною порівняльну оцінку точності розробленої математичної моделі з точністю моделей, одержаних саме цим методом. Серед небагатьох публікацій на цю тему найбільш обґрунтовані оцінки точності методу СРЧЗ наведено в дисертаційній роботі [3]. У цій роботі подано оцінку похибки методу за рахунок дискретизації досліджуваної ділянки для гармонічного поля у втратному середовищі, що повністю відповідає умовам електродинамічної задачі.

За умови виконання критерію Куранта залежність відносної похибки розрахунку напруженості поля методом СРЧЗ оцінюється виразом

$$\delta = \sqrt{\left\{ \frac{\alpha}{k} - \frac{\left[\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha \cdot \pi}{k \cdot n}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \right\}^2 + \left\{ 1 - \frac{\left[\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha \cdot \pi}{k \cdot n}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \right\}^2} \cdot 100\%, \quad (1)$$

де $k = 2\pi/\Lambda$ – хвильове число середовища; Λ – довжина хвилі у середовищі; α – стала загасання втратного середовища; $n = \Lambda / \Delta L$ – кількість інтервалів дискретизації на довжині хвилі у середовищі.

З (1) випливає, що в шарово-неоднорідному середовищі в окремих шарах фантома відносна похибка буде різною. Тому з метою подальшого порівняння методів визначено максимальну відносну похибку за рахунок дискретизації для шару з максимальним рівнем поглинання в діапазоні робочих частот МРТ. На рис. 1 показано залежність максимальної відносної похибки розрахунку амплітуди поля методом СРЧЗ від нормованої величини інтервалу дискретизації $\Delta L / \Lambda$ для середовища з відношенням $\alpha / k = 1,3$.

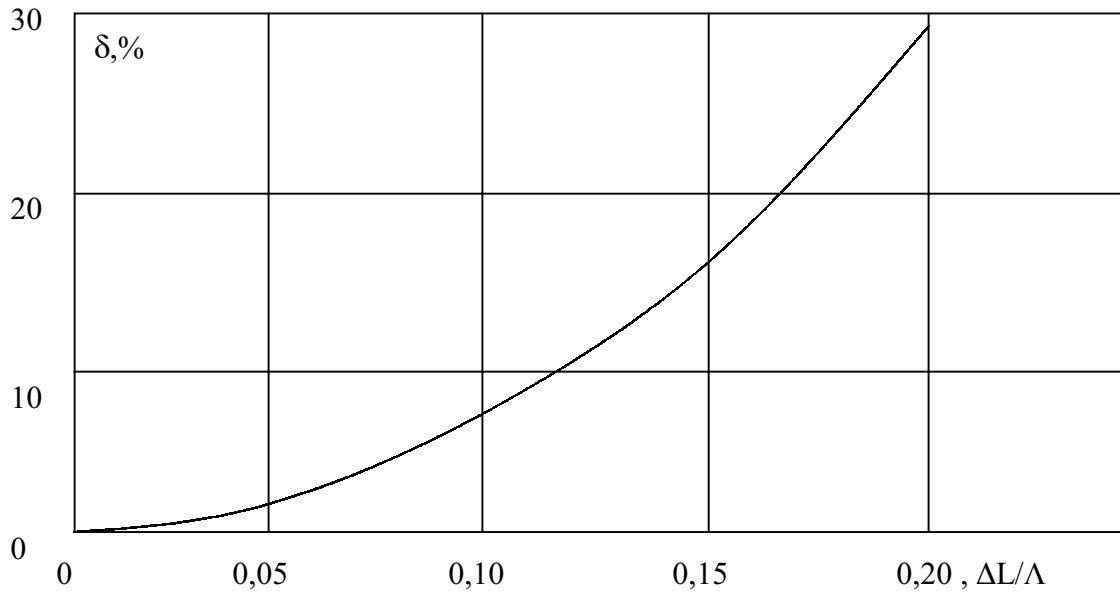


Рис. 1. Залежність максимальної відносної похибки методу СРЧЗ від нормованої величини інтервалу дискретизації

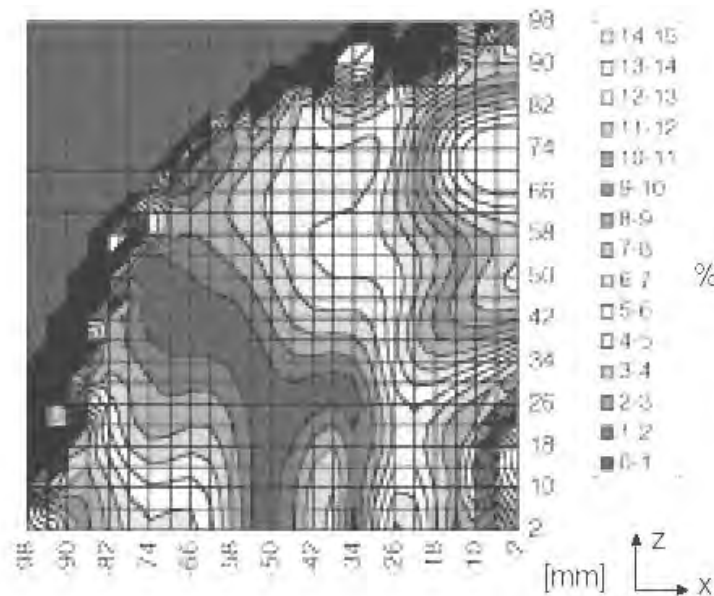


Рис. 2. Розподіл відносної похибки визначення SAR у фантомі [4]

В [4] наведено контурний графік розподілу відносної похибки визначення питомої потужності поглинання (SAR) у поперечному перерізі фантома голови людини при використанні методу СРЧЗ з нормованим інтервалом дискретизації 0,10 (рис. 2). За точний розв'язок задачі прийнято розподіл SAR, одержаний методом мультиполів. Враховуючи квадратичну залежність між SAR та напруженістю електричного або магнітного поля, а також відповідне співвідношення між відносними похибками: $\delta_{SAR} = 2\delta$, одержимо максимальну відносну похибку розрахунку амплітуди поля, що дорівнює 7,5 %. Формула (1) для цього випадку дає оцінку 7,4 %, що підтверджує достатню точність аналітичної оцінки похибки методу СРЧЗ при моделюванні розподілу поля у фантомі.

Точність методу інтегральних рівнянь

Питання оцінки точності запропонованих математичних моделей за умови точних значень вихідних даних практично зводиться до оцінки точності розв'язування відповідних інтегральних рівнянь. Відома методика такої оцінки [5] дає верхню границю відносної похибки для струмів поляризації I та напруженостей поля

$$[\delta I] \leq B \cdot [\delta U],$$

де складові нерівності визначаються через норми відповідних матриць:

$$[\delta I] = \| [\Delta I] \| / \| [I] \|, \quad [\delta U] = \| [\Delta U] \| / \| [U] \|, \quad B = \| [A] \| \cdot \| [A]^{-1} \|,$$

де $[I]$, $[\Delta I]$ – матриці поляризаційних струмів та їх абсолютних похибок; $[U]$, $[\Delta U]$ – матриця-стовпець правої частини системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР); $[A]$ – матриця коефіцієнтів СЛАР, а B є числом обумовленості цієї матриці.

Оцінки похибок квадратурних формул виявляють тенденцію до зменшення величини похибки зі зменшенням комірки, однак не вважаються надійним засобом визначення величини самих похибок при розв'язуванні інтегральних рівнянь такого типу [5]. Надійно оцінити величину похибки з її прив'язкою до розмірів комірки вдається тільки числовими методами.

В [6] оцінено похибки розв'язку інтегрального рівняння для циліндра зі сферичними торцями, що збуджувався диполями Герца. Еталонний розв'язок одержано в такий спосіб. Знайдений розв'язок інтегрального рівняння підставлено у ліву частину рівняння, що дало змогу отримати скориговану праву частину. Для рівняння з такою правою частиною одержаний на початку розв'язок є еталонним.

Розв'язуючи рівняння, використано інтерполяційний метод при апроксимації кусково-постійною, лінійною, квадратичною та сплайн-функціями. Шляхом порівняння з еталоном визначено відносні похибки за амплітудами струмів залежно від величини комірки (інтервалу дискретизації). На рис. 3 показано графік цієї залежності з врахуванням того, що інтервал $\Delta v = 0,6$ відповідав відносному розміру комірки $L/\Lambda = 0,1$ [6].

Оцінка точності математичної моделі розподілу поля зовнішніх джерел у фантомі людини

Подібність типів інтегральних рівнянь, форм та відносних розмірів тіла в опублікованих даних та поставленій задачі дають підстави для застосування наведених результатів для оцінки точності розробленої математичної моделі. Як видно з рис. 3, у практично важливому діапазоні похибок 1...5 % розглянуті способи апроксимації практично рівноцінні. Тому застосування кусково-лінійної апроксимації у розробленій моделі є слушним з точки зору спрощення обчислень.

Для відносних розмірів комірки L/Λ , що дорівнюють 0,1 та 0,2, де Λ – мінімальна довжина хвилі у дискретно-неоднорідному середовищі, похибки розв'язку інтегральних рівнянь δ_r становлять відповідно 2,5 та 8%. Однак похибка розробленої моделі не обмежується цими величинами. Оскільки похибка визначення розподілу струму на півхвиловому вібраторі за даними [7] має величину $\delta_v = 3,5$ %, похибка дискретизації розподілу струму не перевищує $\delta_d = 0,7$ %, а максимальна похибка ітераційного методу розв'язування системи рівнянь – $\delta_i = 0,13$ %, то результуюча максимальна відносна похибка розробленої моделі, визначена за формулою

$$\delta_m = \gamma \cdot \sqrt{\delta_r^2 + \delta_v^2 + \delta_d^2 + \delta_i^2}, \quad (2)$$

з імовірністю 0,997 ($\gamma = 1$) становить відповідно 4,4 та 8,6 %.

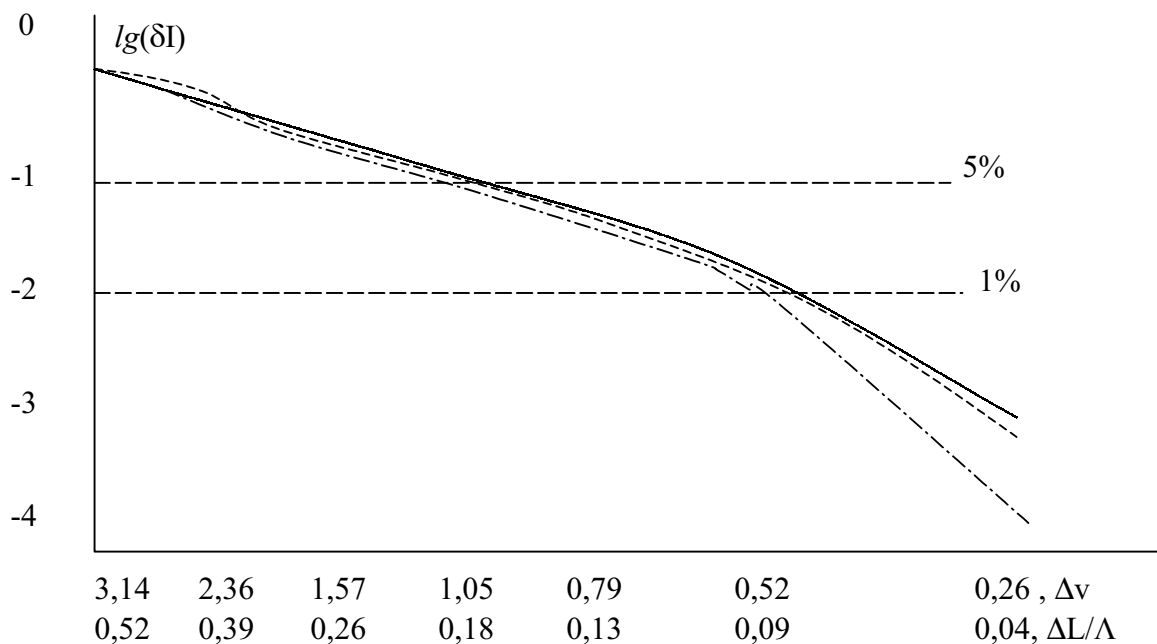


Рис. 3. Похибки числового рішення інтегральних рівнянь за умовами: кусково-постійної та лінійної апроксимації (—); параболічної (---) та сплайнової апроксимації (- · -)

Для порівняння в методі СРЧЗ аналогічні похибки мають величини $\delta = 7,5\%$ та $\delta = 29,5\%$. З цього випливає, що за однакової точності запропонована модель дає змогу збільшити розмір комірки і відповідно зменшити СЛАР приблизно у $2 \cdot (\delta / \delta_m)^3$ рази. Коефіцієнт 2 враховує, що кількість складових електричного та магнітного поля в методі СРЧЗ є у два рази більшою, ніж кількість складових струмів поляризації у побудованій тривимірній моделі.

Висновок

Для порівняння точності моделей, побудованих скінченно-різницевою методом у часовій зоні та модифікованим методом інтегральних рівнянь, визначено їх максимальні відносні похибки за однакових кроків дискретизації. У першому випадку застосовано аналітичну оцінку. У другому – через відсутність надійних аналітичних методів оцінки точності математичних моделей, побудованих методом інтегральних рівнянь, застосовано узагальнену чисельну оцінку за даними публікацій. Виявлено, що похибка обчислення тривимірних моделей, побудованих з застосуванням методу інтегральних рівнянь для задач подібних вирішень, є помітно меншою, ніж для таких самих моделей, побудованих скінченно-різницевою методом у часовій зоні.

1. Gobyk V., Yakovenko Y. *Three-Dimensional Model of Electromagnetic Field Distribution in the Human Head from Mobile Phones*. // *Proceedings of International Conference ICATT*. – Sevastopol, 2003. – P. 825–827. 2. Гоблик В.В., Яковенко Є.І. *Тривимірна модель розподілу поля вібраторної антени радіотелефону в фантомі голови людини* // *Відбір і обробка інформації: Міжвідомчий збірник наукових праць НАН України, ФМІ*, 19 (95). – Львів, 2003. – С. 22–26. 3. Vidacic D. *Assessment of FDTD Model Parameters for Lossy Media*. // *Thesis. University of Novi Sad*. – 2003. – P. 54. 4. Burkhardt M., Kuster N., Schönborn F. *Error estimation of Staircasing Effects for FDTD Simulations Involving Complex Bodies* // *Bio Electromagnetics and Electromagnetic Compatibility. Research project*. – 2003. – P. 83–84. 5. Воеводин В.В. *Вычислительные основы линейной алгебры*. – М., 1977. 6. Васильев Е.Н. *Возбуждение тел вращения*. – М., 1987. 7. Кинг Р., Смит Г. *Антенны в материальных средах* / Пер. с англ.; Под ред. Б.В. Штейншлейгера. – М., 1984.