6. Надежность технических систем: Справочник / Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др. // Под ред. И.А. Ушакова. – М., 1985. 7. Райншке К., Ушаков И.А., Оценка надежности систем с использованием графов // Под ред. И.А. Ушакова. – М., 1988. 8. Sericola Bruno, Interval-Availability Distribution of 2-State Systems with Exponential Failures and Phase-Type Repairs // IEEE Transactions on Reliability. – 1994 – Vol. 43. – No 2. – P. 335–343. 9. Мандзій Б.А., Бєляєв В.П., Волочій Б.Ю. Метод надійнісного моделювання самовідновлюваних бортових інформаційних систем // Космічна наука та технологія. – 1998. – Т.4, №4. – С.55–60. 10. Lefebvre Ya. Using the phase method to model degradation and maintenance efficiency // International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering. – 2003. – Vol.10. – No.4. – P.383-405. 11. ReliaSoft Corporation, System Analysis Reference: Reliability Availability and Optimization. – ReliaSoft Publishing, Tucson, Arizona, 2003. 12. Neuts M. Matrix Geometric Solutions: Stochastic Models. – Johns Hopkins University Press, Baltimore–1981. 13. Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. – М., 1989.

УДК 62.507

Вадим Мінзюк
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра радіоелектронних пристроїв та систем

СПОСІБ СИНТЕЗУВАННЯ КОН'ЮНКТЕРМІВ БУЛОВИХ ФУНКЦІЙ

Запропоновано процедуру гіпотетичного синтезування кон'юнктермів, яка може бути корисною для побудови методів мінімізації булових функцій. Процедура дає змогу шукати кон'юнктерми заданої функції довільних рангів без проміжних склеювань, не спричиняючи появи тавтології. Порівняно низькі вимоги зазначеної процедури до обчислювальних ресурсів уможливлюють розширити коло розв'язуваних задач.

In this paper the procedure of hypothetic conjuncterms synthesis for Boolean functions minimization has been proposed. This procedure allows search of any ranks conjuncterms without finding of mediate ranks. The procedure does not cause tautology. Comparatively low requirements of the procedure to computational resources allows to extend range of solvable problems.

Вступ

Проблема мінімізації булових функцій n змінних є важливою складовою логічного синтезу комбінаційних мереж та цифрових автоматів. З розвитком мікроелектроніки спостерігається загальна тенденція до зростання розмірності таких задач та, відповідно, обсягів обчислювальних робіт для їх розв'язання. Навіть у разі використання комп'ютерної техніки задача мінімізації булових функцій багатьох змінних вимагає таких обчислювальних затрат (апаратурних ресурсів та машинного часу), що можливості комп'ютера можуть виявитися недостатніми для її розв'язання. Тому для успішного розв'язання задачі мінімізації постає проблема швидкого пошуку простих кон'юнктермів.

Класичні методи мінімізації [1–4] ґрунтуються на ідеї загального перебору всіх можливих попарних склеювань кон'юнктермів (кон'юнктивних термів) заданої функції з метою пошуку простих кон'юнктермів скороченої ДНФ. Загальний перебір є громіздкою процедурою, яка вимагає значних обчислювальних затрат. Крім того, він викликає появу тавтології, для ліквідації якої необхідно до масиву кон'юнктермів застосувати засоби пошуку тотожних елементів, що додатково обтяжує процес мінімізації.

Матричний метод мінімізації в кон'юнктермовому полі [5] виключає необхідність перебору. Але після кожної процедури зчитування доводиться сортувати одержані кон'юнктерми за векторами, що спричиняє додаткові часові затрати. Крім того, матриці підполів кон'юнктермового поля вимагають чималих затрат пам'яті. Порівняно з класичними методами спрощується процес ліквідації тавтології, що зводиться до пошуку тотожних векторів.

У роботі пропонується спосіб пошуку кон'юнктермів, який дасть змогу уникнути загального перебору, не вимагаючи значних обсягів пам'яті та не викликаючи появи тавтології. Порівняно з відомими такий спосіб зменшить обчислювальні затрати на мінімізацію булових функцій багатьох змінних.

Основні поняття та означення

У псевдотрійковому зображенні кон'юнктерма *r*-рангу (*r*=0,1,2,...,*n*) кожна булова змінна x_i відображається окремим розрядом a_i ($a_i \in \{0,1,-\}$). Псевдотрійкове зображення є незручним для реалізації обчислень за допомогою комп'ютерів, тому розглянемо подання кон'юнктермів двійковими числами. Для цього введемо поняття *маски* значущих розрядів *M*, в якій значущі розряди кон'юнктерма (нулі й одиниці) позначимо одиницями, а поглинуті (риски „-") – нулями. Наприклад, для $(00-1-)$ маска значущих розрядів має вигляд *M* =11010. Таку маску можна інтерпретувати як двійкове число. Тепер у псевдотрійковому зображенні кон'юнктерма риски можна замінити нулями і в такий спосіб без втрати інформації одержати двійкове зображення, яке теж можна інтерпретувати як двійкове число. Подання кон'юнктерма двійковим зображенням з маскою називатимемо *масковим зображенням* кон'юнктерма. Наприклад, кон'юнктерм $(00-1-)$ має маскове зображення $(00010)_{11010} = (2)_{26}$.

Множину всіх можливих кон'юнктермів усіх *r*-рангів булової функції *n* змінних *f* можна розбити на підмножини S_M за масками значущих розрядів *M*. Такі підмножини S_M називатимемо *масковими множинами* заданої функції.

Із закону склеювання випливає, що для склеювання двох кон'юнктермів булової функції необхідно, щоб вони відрізнялись вмістом лише одного значущого розряду. Тому попарне склеювання можливе лише між кон'юнктермами, які належать до однієї маскової множини, тобто мають однакові маски. У загальному випадку при попарному склеюванні кон'юнктермів деякої маскової множини (*r*+1)-рангу можна одержати кон'юнктерми *r*-рангу, що належать до різних *r*+1 маскових множин *r*-рангу, маски яких одержуються заміною однієї з одиниць маски *M* (а таких є *r*+1) на нуль. Маскову множину, елементи якої використовуємо для пошуку кон'юнктермів меншого рангу, називатимемо *твірною масковою множиною*, а утворені за допомогою її елементів маскові множини менших рангів – *похідними масковими множинами* із розглянутої твірної. Кожну із цих похідних множин *r*-рангу можна трактувати як твірну для одержання похідних множин (*r*-1)-рангу тощо. Утворені в такий спосіб маскові множини нижчих рангів є похідними і відносно розглянутої твірної (*r*+1)-рангу, оскільки її елементи містяться в кон'юнктермах цих похідних множин. Звідси мінтермова множина є твірною для всіх множин менших рангів, які, своєю чергою, є похідними від неї.

Проаналізуймо причини виникнення тавтології у класичному підході до мінімізації булових функцій. Будь-який кон'юнктерм *r*-рангу булової функції *n* змінних, що належить до деякої маскової множини S_M, містить в собі 2(*n*-*r*) кон'юнктермів (*r*+1)-рангу, тобто *n*-*r* пар (*r*+1)-рангу, які внаслідок склеювання утворюють цей кон'юнктерм *r*-рангу. Наприклад, кон'юнктерм 2-рангу $(00---)$ містить шість кон'юнктермів 3-рангу $(00--0)$, $(00--1)$, $(00-0-)$, $(00-1-)$, $(000--)$, $(001--)$, тобто три пари:

$$(00--0) \vee (00--1) = (00-0-) \vee (00-1-) = (000--) \vee (001--) = (00---).$$

Іншими словами, існує *n-r* твірних маскових множин (*r*+1)-рангу, які внаслідок попарного склеювання кон'юнктермів утворюють одну й ту саму похідну множину S_M *r*-рангу. Отже, пошук усіх можливих попарних склеювань серед кон'юнктермів (*r*+1)-рангу призводить до того, що кожний кон'юнктерм *r*-рангу вноситься у множину результатів склеювання *n-r* разів. У такому разі не допустити появу тавтології можна було б шляхом запису новоутворених кон'юнктермів у спеціальний масив, адреси комірок якого однозначно пов'язані з їх вмістом (числовим зображенням кон'юнктермів) деякою функцією хешування. Тоді тотожні кон'юнктерми заповнюють одні й ті самі комірки, а множина заповнених комірок не містить тавтології. У загальному випадку на кожному кроці мінімізації необхідно зарезервувати під цей масив кількість пам'яті, що відповідає повному кон'юнктермовому полю *r*-рангу для заданої функції [5]: $2^r \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ комірок. Але це вимагає великих обсягів пам'яті. Разом з тим залишається актуальною проблема втрати ресурсів на повторне одержання кон'юнктермів усіма можливими попарними склеюваннями, а їх, нагадаємо, аж *n-r* для кожного кон'юнктерма. У цьому контексті запропонований в цій роботі спосіб пошуку кон'юнктермів дає змогу одержувати кожний кон'юнктерм лише одним склеюванням із всіх можливих, чим виключає можливість появи тавтології.

Поняття гіпотетичного синтезування кон'юнктерма

Розглянемо деякий кон'юнктерм (*r*+*t*)-рангу $K = \left(a_{n-1}...a_{j+t+1}a_{j+t}...a_j a_{j-1}...a_2 a_1 a_0\right)$ булової функції *n* змінних *f*, де $a_i \in \begin{cases} \{0,1,-\}, \text{якщо} & i = 0,1,...,j-1, j+t+1,...,n-1 \\ \{0,1\}, \text{якщо} & i = j, j+1,..., j+t \end{cases}$ (*n*, *j*, *t* – цілі невід'ємні числа). На підставі існування K висунемо гіпотезу про існування у заданій функції кон'юнктерма *r*-рангу $\left(a_{n-1}...a_{j+t+1} - ... - a_{j-1}...a_2 a_1 a_0\right)$ (змінні з індексами *j*,*j*+1,...,*j*+*t* є поглинутими), що містить розглянутий кон'юнктерм K. Кон'юнктерм, на підставі якого висувається гіпотеза, називатимемо *твірним кон'юнктермом*, а одержаний внаслідок висунення гіпотези – *гіпотетичним кон'юнктермом* функції *f*. Гіпотетичний кон'юнктерм є істинним, якщо гіпотеза справедлива, тобто такий кон'юнктерм існує в заданій функції, а інакше – хибним, якщо гіпотеза є хибною, тобто такий кон'юнктерм не існує. Процес одержання кон'юнктерма булової функції способом формування гіпотетичних кон'юнктермів із подальшою перевіркою їх істинності називатимемо *гіпотетичним синтезуванням кон'юнктерма*. Сформувати гіпотетичний кон'юнктерм *r*-рангу на підставі деякого твірного кон'юнктерма (*r*+*t*)-рангу означає замінити у псевдотрійковому записі твірного *t* значущих розрядів символом „-”. Наприклад, для $t = 2$ на підставі твірного $(01--0)$ можна сформувати $(----0)$, $(-1---)$, $(0----)$. У масковому зображенні формування гіпотетичного кон'юнктерма деякої похідної множини зводиться до порозрядної кон'юнкції двійкового зображення твірного кон'юнктерма і маски шуканої похідної множини. Бінарну операцію порозрядної кон'юнкції двійкових чисел позначатимемо символом “&”. Наведений раніше приклад набуває такого вигляду: для $t = 2$ на підставі $(01000)_{11001}$ можна сформувати $(01000 \,\&\, 00001)_{00001} = (00000)_{00001}$, $(01000 \,\&\, 01000)_{01000} = (01000)_{01000}$, $(01000 \,\&\, 10000)_{10000} = (00000)_{10000}$.

Умова істинності гіпотетичного кон'юнктерма

Якщо на підставі 2^t різних твірних кон'юнктермів (*r*+*t*)-рангу, що належать одній масковій множині заданої функції, можна сформувати один і той самий гіпотетичний кон'юнктерм *r*-рангу, то цей гіпотетичний кон'юнктерм є істинний, інакше – хибний.

Доведення. Нехай $t = 1$. Тоді в межах однієї маскової множини (*r*+1)-рангу деякої булової функції *n* змінних підставою для формування гіпотетичного кон'юнктерма *r*-рангу

$(a_{n-1}...a_{j+1}-a_{j-1}...a_2a_1a_0)$ можуть бути тільки кон'юнктерми виду $(a_{n-1}...a_{j+1}a_ja_{j-1}...a_2a_1a_0)$, де $a_j \in \{0,1\}$. Тому може існувати не більше двох твірних, а саме: $(a_{n-1}...a_{j+1}0a_{j-1}...a_2a_1a_0)$ та $(a_{n-1}...a_{j+1}1a_{j-1}...a_2a_1a_0)$. Такі кон'юнктерми склеюються по змінній з індексом *j*, утворюючи розглянутий кон'юнктерм *r*-рангу:

$$(a_{n-1}...a_{j+1}0a_{j-1}...a_2a_1a_0)\vee(a_{n-1}...a_{j+1}1a_{j-1}...a_2a_1a_0)=(a_{n-1}...a_{j+1}-a_{j-1}...a_2a_1a_0).$$

Тоді наявність двох різних твірних переводить гіпотетичний кон'юнктерм з розряду гіпотез в розряд тверджень.

Неможливість сформувати гіпотетичний кон'юнктерм $(a_{n-1}...a_{j+1}-a_{j-1}...a_2a_1a_0)$ на підставі двох різних твірних кон'юнктермів свідчить про відсутність у заданій буловій функції принаймні одного з його твірних: $(a_{n-1}...a_{j+1}0a_{j-1}...a_2a_1a_0)$ чи $(a_{n-1}...a_{j+1}1a_{j-1}...a_2a_1a_0)$, що заперечує гіпотезу про існування цього кон'юнктерма, тобто в цьому випадку гіпотетичний кон'юнктерм є хибним. Отже, умова істинності гіпотетичного кон'юнктерма справедлива для $t=1$.

Нехай ця умова справджується для деякого натурального *t*. Тоді гіпотетичний кон'юнктерм *r*-рангу $(a_{n-1}...a_{j+t+1}0-...-a_{j-1}...a_2a_1a_0)$ деякої булової функції *n* змінних є істинним, якщо його можна сформувати на підставі 2^t різних твірних кон'юнктермів (*r*+*t*)-рангу $(a_{n-1}...a_{j+t+1}0a_{j+t-1}...a_ja_{j-1}...a_2a_1a_0)$, що належать до однієї маскової множини заданої функції, причому $a_i \in \{0,1\}$, якщо $i=j, j+1,..., j+t-1$.

Аналогічно, гіпотетичний кон'юнктерм *r*-рангу $(a_{n-1}...a_{j+t+1}1-...-a_{j-1}...a_2a_1a_0)$ (відрізняється від розглянутого вище лише змінною з індексом *j*+*t*) є істинним, якщо його можна сформувати на підставі 2^t твірних кон'юнктермів (*r*+*t*)-рангу $(a_{n-1}...a_{j+t+1}1a_{j+t-1}...a_ja_{j-1}...a_2a_1a_0)$, що належать до тієї самої маскової множини заданої функції. Одержані кон'юнктерми *r*-рангу склеюються по змінній з індексом *j*+*t* в кон'юнктерм (*r*-1)-рангу: $(a_{n-1}...a_{j+t+1}0-...-a_{j-1}...a_2a_1a_0)\vee(a_{n-1}...a_{j+t+1}1-...-a_{j-1}...a_2a_1a_0)= \quad =(a_{n-1}...a_{j+t+1}--...-a_{j-1}...a_2a_1a_0)$, для якого у вихідній множині існує $2^t \cdot 2 = 2^{t+1}$ твірних кон'юнктермів (*r*+*t*)-рангу.

За відсутності принаймні одного з 2^{t+1} твірних був би хибний хоча б один з розглянутих гіпотетичних кон'юнктермів *r*-рангу, що заперечує наявність кон'юнктерма $(a_{n-1}...a_{j+t+1}--...-a_{j-1}...a_2a_1a_0)$.

Отже, умова істинності гіпотетичного кон'юнктерма справедлива для *t*+1. За аксіомою математичної індукції, ця умова справедлива для всіх натуральних *t*. ❑

Зменшити затрати часу на гіпотетичне синтезування кон'юнктермів можна, якщо визначити порожні маскові множини ще до формування гіпотетичних кон'юнктермів. Це уможливлює наведена нижче умова заперечення похідних маскових множин.

Умова заперечення похідних маскових множин

Якщо деяка маскова множина (*r*+*t*)-рангу S_M булової функції *n* змінних містить менше ніж 2^t різних кон'юнктермів, то похідні від неї маскові множини рангу *r* і нижче є порожніми.

Доведення. Оскільки гіпотетичний кон'юнктерм однозначно визначається порозрядною кон'юнкцією двійкового зображення твірного кон'юнктерма і маски шуканої похідної множини, можна стверджувати, що на підставі одного твірного кон'юнктерма в межах кожної похідної множини можна сформувати тільки один гіпотетичний кон'юнктерм. Тому на підставі деякої маскової множини (r+t)-рангу S_M , що містить менше ніж 2^t твірних кон'юнктермів, у похідній множині r-рангу неможливо сформувати більше ніж $2^t - 1$ гіпотетичних кон'юнктермів. Тоді за умовою істинності всі утворені в такий спосіб гіпотетичні кон'юнктерми є хибними, а розглянута похідна множина є порожньою. Оскільки за відсутності твірних неможливо сформувати гіпотетичний кон'юнктерм, то похідні від порожньої множини так само є порожніми. Таким чином, всі похідні множини від S_M , починаючи з рангу r і нижче, є порожніми. ❑

Розіб'ємо маскову множину S_M на підмножини за вагами кон'юнктермів, тобто за кількістю одиниць в зображенні кон'юнктермів: $S_M = \left\{S_M^0, S_M^1, ..., S_M^n\right\}$.

Умова розбиття твірної множини

Відсутність у твірній множині S_M кон'юнктермів із деякою вагою p дає змогу розбити S_M на два набори підмножин $\left\{S_M^0, S_M^1, ..., S_M^{p-1}\right\}$ та $\left\{S_M^{p+1}, S_M^{p+2}, ..., S_M^n\right\}$ так, що кон'юнктерми похідних множин від різних наборів між собою не склеюються.

Доведення. Із закону склеювання випливає, що попарні склеювання кон'юнктермів твірної S_M деякого рангу r можливі лише між елементами підмножин, ваги кон'юнктермів яких відрізняються на одиницю. Тому відсутність кон'юнктермів з деякою вагою p розбиває S_M на два набори підмножин $\left\{S_M^0, S_M^1, ..., S_M^{p-1}\right\}$ та $\left\{S_M^{p+1}, S_M^{p+2}, ..., S_M^n\right\}$ так, що між кон'юнктермами різних наборів склеювання неможливе. Крім того, за умовою істинності гіпотетичних кон'юнктермів для існування кон'юнктерма (r-1)-рангу похідної множини ваги p необхідне існування обох твірних. Із означення гіпотетичного кон'юнктерма ваги цих твірних становлять p та p+1. Оскільки прийнято, що не існує твірних з вагою p, то в похідній множині (r-1)-рангу не існує підмножини з вагою p. Аналогічно, для існування кон'юнктерма (r-1)-рангу похідної множини з вагою p-1 необхідне існування твірних, ваги яких становлять p-1 та p. Тому в похідній множині (r-1)-рангу не існує підмножини з вагою p-1. Таким чином, похідні (r-1)-рангу від різних наборів $\left\{S_M^0, S_M^1, ..., S_M^{p-1}\right\}$ та $\left\{S_M^{p+1}, S_M^{p+2}, ..., S_M^n\right\}$ між собою не склеюються з причини відсутності кон'юнктермів з вагами p-1 та p. Ці похідні (r-1)-рангу є твірними для (r-2)-рангу. Тому можна стверджувати, що похідні всіх рангів від різних наборів $\left\{S_M^0, S_M^1, ..., S_M^{p-1}\right\}$ та $\left\{S_M^{p+1}, S_M^{p+2}, ..., S_M^n\right\}$ між собою не склеюються. ❑

Зауважимо, що у разі відсутності у твірній кон'юнктермів з певною вагою згідно з умовою розбиття твірної множини задача гіпотетичного синтезу кон'юнктермів розділяється на дві окремі задачі. Ця обставина зменшує вимоги до ресурсів комп'ютера на окремих кроках синтезування кон'юнктермів.

Процедура гіпотетичного синтезування кон'юнктермів

Нехай для булової функції n змінних існує деяка твірна множина S_M , з маскою $M = m_{n-1}...m_{j+t+1}$ $m_{j+t+1}1...1m_{j-1}...m_2m_1m_0$, де m_i є розрядом двійкового коду маски (i=0,1,2,...,j-1,j+t+1,…,n-1). Необхідно знайти похідну множину $S_{m_{n-1}...m_{j+t+1}0...0m_{j-1}...m_2m_1m_0}$ (різниця рангів твірної і похідної множин дорівнює t).

Процедура гіпотетичного синтезування кон'юнктермів складається з таких етапів:

– перевіряється умова заперечення похідної множини, за якою похідна множина визнається порожньою, якщо твірна містить менше ніж 2^t різних кон'юнктермів;

– якщо не встановлено, що похідна множина є порожньою, то за вагами кон'юнктермів твірна розбивається на підмножини, які розташовують в порядку наростання ваг: $S_M = \left\{S_M^0, S_M^1, ..., S_M^n\right\}$;

– перевіряється умова розбиття твірної множини для розділення розглядуваної задачі на окремі підзадачі гіпотетичного синтезування кон'юнктермів;

– викреслюються з подальшого розгляду підмножини, для яких не існує такої підмножини, щоб різниця ваг їх кон'юнктермів становила одиницю;

– послідовно, починаючи з найменшої ваги, на підставі кожної підмножини формуються гіпотетичні кон'юнктерми як порозрядна кон'юнкція двійкового зображення твірного і маски шуканої похідної множини $m_{n-1}...m_{j+t+1}0...0m_{j-1}...m_2m_1m_0$. Якщо двійкове зображення гіпотези збігається з двійковим зображенням твірного, то гіпотетичний кон'юнктерм заноситься у підмножину шуканої маскової множини з такою самою вагою, як і вага твірного *p*, із зазначенням біля похідного кількості синтезованих копій „1". Інакше в синтезованих підмножинах з вагами кон'юнктермів від *p-t* по *p*-1 шукається ідентичне до гіпотетичного двійкове зображення, а в разі його знаходження збільшується на одиницю зазначена для похідного кількість копій;

– із одержаної множини гіпотетичних кон'юнктермів зчитуються істинні, тобто такі, для яких зазначена кількість копій дорівнює 2^t.

Проілюструємо на прикладі описану вище процедуру.

Приклад. Знайти похідну множину S_{0011} із твірної, що збігається з досконалою ТМФ:

$$Y^1 = \{2,4,8,3,6,9,10,11,7,15\}^1 .$$

Розв'язання.

$Y^1 = S_{1111} = \{(0010),(0100),(1000),(0011),(0110),(1001),(1010),(1011),(0111),(1111)\}_{1111}$.

Ранг твірної множини S_{1111} дорівнює 4, а ранг шуканої похідної множини S_{0011} – 2, тоді різниця їх рангів $t = 2$. Кількість кон'юнктермів твірної – 10, що є більше 2^t. Отже, умова заперечення похідної множини S_{0011} не виконується.

Розіб'ємо S_{1111} на підмножини за вагами кон'юнктермів та розташуємо їх у порядку наростання ваг: $S^1_{1111} = \{(0010),(0100),(1000)\}_{1111}$; $S^2_{1111} = \{(0011),(0110),(1001),(1010)\}_{1111}$; $S^3_{1111} = \{(1011),(0111)\}_{1111}$; $S^4_{1111} = \{(1111)\}_{1111}$.

Сформуємо гіпотетичні кон'юнктерми за маскою 0011 на підставі твірних S^1_{1111}:

$$(0010 \,\&\, 0011)_{0011} = (0010)_{0011} .$$

Оскільки двійкові зображення твірного і гіпотетичного кон'юнктермів збігаються, заносимо останній у множину S^1_{0011} із зазначенням над ним кількості його копій „1": $S^1_{0011} = \left\{ \overset{1}{(0010)} \right\}_{0011}$.

Для твірного $(0100)_{1111}$ двійкове зображення похідного $(0000)_{0011}$ не збігається з твірним, тому необхідно шукати його копію у підмножинах S_{0011} з вагами від 1-*t* по 0. Але такі відсутні, тому переходимо до наступного твірного.

У результаті формування всіх гіпотетичних кон'юнктермів за маскою 0011 маємо

$$S^1_{0011} = \left\{ \overset{3}{(0010)} \right\}_{0011} , \quad S^2_{0011} = \left\{ \overset{4}{(0011)} \right\}_{0011} .$$

З одержаної множини гіпотетичних кон'юнктермів зчитуємо істинні, тобто такі, для яких згідно з умовою істинності гіпотетичних кон'юнктермів кількість копій дорівнює 4. Отже, шукана множина $S_{0011} = \{(0011)\}_{0011} = \{(--11)\} = \{(3,7,11,15)\}$. Таким чином, в ТМФ заданої функції із маскою 0011 присутній тільки кон'юнктерм $(3,7,11,15)$.

Висновки

За допомогою розглянутої процедури досить просто побудувати власне кон'юнктермове поле булової функції [5] як набір всіх маскових множин заданої функції, що можна використати для формування скороченої ДНФ у задачах мінімізації булових функцій. Водночас в процесі пошуку простих кон'юнктермів за один крок формується лише одна похідна множина деякого рангу *r*, тому кількість комірок пам'яті, необхідних для зберігання сформованих кон'юнктермів, на одному кроці не перевищує 2^r. Порівняно з класичним підходом, що вимагає на одному кроці резервування пам'яті під усі кон'юнктерми шуканого рангу *r* (а це становить $2^r \frac{n!}{r!(n-r)!}$ комірок), вимоги запропонованої процедури до обсягу оперативної пам'яті комп'ютера є значно меншими.

Переваги процедури гіпотетичного синтезування кон'юнктермів:

- елементарна реалізація за допомогою обчислювальної техніки;
- можливість визначити порожні маскові множини вже на першому кроці до формування гіпотетичних кон'юнктермів і перевірки їх істинності;
- обмеження області пошуку копій під час перевірки істинності гіпотетичних кон'юнктермів;
- неможливість виникнення тавтології;
- синтезування кожного кон'юнктерма лише одним склеюванням із всіх можливих;
- універсальність щодо різниці рангів твірної та похідної множин, що дає змогу шукати кон'юнктерми довільних рангів без проміжних склеювань;
- порівняно низькі вимоги до оперативної пам'яті.

Зазначені переваги уможливлять зменшити обчислювальні затрати на розв'язання задач мінімізації булових функцій та розширити в такий спосіб коло практично розв'язуваних задач.

1. McCluskey E.J. Minimization of Boolean Functions / Bell System Technical Journal. – 1956. – 35. – P. 1417–1444. 2. Quine W.V. The Problem of Simplifying Truth Functions / American Mathematical Monthly. – 1952. – 59. – P. 521–531. 3. Закревский А.Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. – М., 1971. 4. Лузин С.Ю. Асимптотически оптимальный метод получения простых импликант / АВТ – 2000. – №1. – С.80–84 5. Рыцар Б.Е. Метод минимизации булевых функций / Проблемы управления и информатики. – 1997. – №2. – С.100–113