

АНАЛІЗ НЕКООРДИНАТНИХ ПЛОЩИННИХ СТРУКТУР ХВИЛЕВОДНИХ ЗБУДЖУВАЧІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

© Захарія Йосип, 2004

Для аналізу площинних структур хвильоводних збуджувачів пропонується скінченний елемент у вигляді вузького колового сектора. Скінченний елемент такої форми задовольняє краєві умови для густини струму. Наведено аналітичні вирази для ортогональних поверхневих струмів на такому елементі. Використовуючи секторний скінченний елемент, досліджено площинний некоординатний збуджувач прямокутного хвильовода у вигляді колового сектора.

For analysis of nonuniform waveguide exciters circle sector finite element is proposed. Use FEM (finite element-method) the noncoordinate exciter of rectangular waveguide is considered.

Вступ

Площинні структури найчастіше є складовими частинами збуджувачів складної конструкції [1, 2]. На рис. 1 показано такі структури трикутної та секторної форми, які безпосередньо можуть бути збуджувачами або бути частинами збуджувачів комбінованого типу. Секторні структури характеризуються радіусом R і кутом у вершині ϑ_0 . Живлення таких збуджувачів моделюємо дельта-генератором з напругою U , прикладеною в площині $x=0$. Тонку металеву пластину вважаємо ідеально провідною. Результати аналізу цієї структури дають змогу синтезувати властивості збуджувачів складної конструкції з частинами трикутної (секторної) форми.

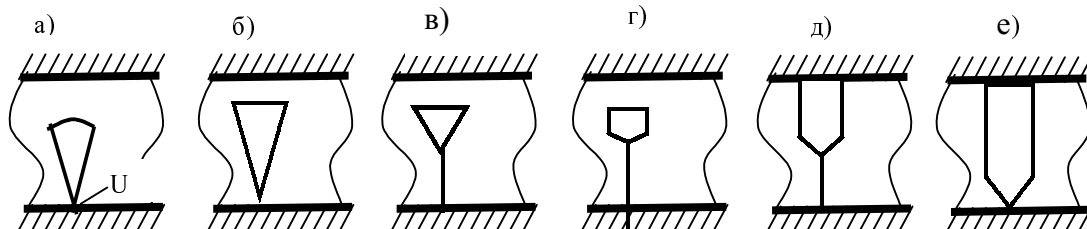


Рис. 1. Секторний (а) і трикутний (б) збуджувачі хвильоводів. Штиревий збуджувач з трикутним (в) і смужково трикутним (г) навантаженнями; смужково-штиревий (д) і смужковий з трикутною основою (е) збуджувачі

Силкові лінії густини поверхневого струму у площинній структурі згаданого вище типу найчастіше розходяться з вершини структури і в загальному випадку не є паралельні до координатних ліній об'єму хвильовода. Тому відповідна електродинамічна задача є некоординатною і може бути розв'язана наближеними методами, зокрема методом скінченних елементів [3]. Як відомо, цей метод полягає у зручній дискретизації некоординатної структури на певну кількість достатньо малих скінченних елементів. При цьому враховують краєві умови для поверхневого струму на лініях обмеження площинного елемента. Форму скінченного елемента вибирають так, щоб його краї були паралельними до силових ліній густини струму в структурі. На інших сторонах площі елемента згадані краєві умови можуть бути нульовими або ненульовими. Останній випадок має місце, якщо структура з'єднана з іншими частинами збуджувача. Краєві умови для поверхневих струмів забезпечуються відповідною апроксимацією розподілу густини поверхневого струму.

Алгоритм аналізу

Для площинних структур з'ясованого вище типу пропонується скінченний елемент у вигляді вузького колового сектора, зображеного на рис. 2. Розподіл густини поверхневого струму по радіальній координаті (r) для нульової крайової умови на дузі обмеження елемента запишемо у вигляді

$$\eta_r = \eta_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (1)$$

де η_1 – початкова густина струму. Лінійна апроксимація розподілу густини струму (1) задовольняє нульовій крайовій умові на дузі $r=R$. У разі ненульової крайової умови необхідно увести розподіл

$$\eta_r = \eta_2 \frac{r}{R}, \quad (2)$$

який визначає густина струму за $r=R$. Початкові густини струмів, що протікають в напрямку радіальної координати, доцільно записати через відповідні струми: $\eta_1 = I_1 / r\theta$; $\eta_2 = I_2 / r\theta$. Струми I_1, I_2 не залежать від радіальної координати. У скінченному елементі вони протікають у тому самому напрямку, однак відповідно до виразів (1) і (2) мають різний розподіл по довжині скінченного елемента. Вважаємо, що секторний елемент достатньо вузький і на кожній дузі напрямком вектора $\bar{\eta}_r$ є однаковий. Така умова дає змогу використати проекції вектора густини струму на прямокутні координати перерізу хвилевода

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \theta; \quad y' = d \pm r \sin \theta; \\ \eta_x &= \eta_r \cos \theta; \quad \eta_y = \eta_r \sin \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

де θ – кут нахилу елемента відносно вертикальної осі (рис. 2); d – відстань розташування вершини секторного збуджувача від вузької стінки хвилевода. Відповідно до вказаної вище умови, проекції (3) також є незмінними на дузі елемента.

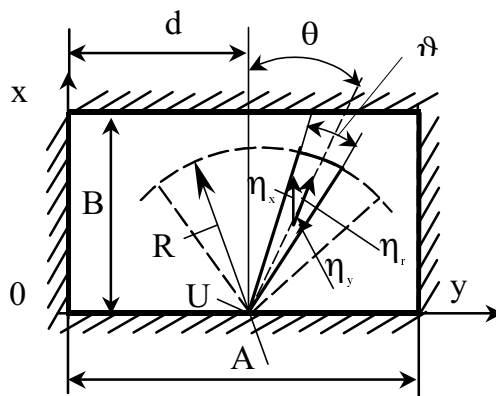


Рис. 2. Секторний елемент в перерізі прямокутного хвилевода

Векторний потенціал магнітного поля струму в одному скінченному елементі, як відомо, записують за допомогою об'ємної густини струму, яка у нашому випадку дорівнює добутку поверхневої густини струму і дельта-функції $\delta(\mathbf{z})$ даної у площині $\mathbf{z}'=0$. За такою моделлю поверхневий струм пластини збуджувача подано листком струму в площині симетрії пластини: $\delta_x = \eta_x \delta(\mathbf{z})$. Використовуючи функцію Гріна ($G_x(\bar{\mathbf{r}}|\bar{\mathbf{r}}')$) для прямокутного хвилевода [3], векторний потенціал запишемо у вигляді

$$\mathbf{A}_x = -\mu_0 \int_{V'} G_x(\bar{\mathbf{r}}|\bar{\mathbf{r}}') \delta_x dV', \quad (4)$$

де μ_0 – магнітна проникність вакууму, а V' – об'єм зі стороннім струмом. Враховуючи, що $dV' = ds' dz'$, а також наведене вище значення густини струму δ_x , після інтегрування по z' в границях $z' = \pm \infty$, отримаємо

$$A_x = -\mu_0 \int_{s'} G_x(\bar{r} | \bar{r}', z'=0) \eta_x ds', \quad (5)$$

де s' – площа скінченного елемента. Підставляючи значення поверхневої густини струму, дане виразами (1), (3), а також дійсний для прийнятих тут умов запис $ds' = r \theta dr$, дістанемо інтеграл по радіальній координаті r

$$A_{x1} = -\mu_0 I_1 \cos \theta \int_0^R G_x(\bar{r} | \bar{r}', z'=0) \left(1 - \frac{r'}{R}\right) dr. \quad (6)$$

Отже, для прийнятої вище апроксимації розподілу густини поверхневого струму можливо замінити інтегрування по площі інтегрування за радіальною координатою. Такий результат дає змогу вирішити проблему некоординатності у цій задачі. Для складової поверхневого струму η_2 необхідно увести функцію розподілу густини струму відповідно до виразу (2)

Векторний потенціал A_{y1} в напрямку координати y повинен враховувати **напрямок** вектора густини струму. За наведеним вище алгоритмом для густини η_{y1} отримаємо

$$A_{y1} = -\mu_0 I_1 \sin \theta \int_0^R G_y(\bar{r} | \bar{r}', z'=0) \left(1 - \frac{r'}{R}\right) dr. \quad (7)$$

Функції Гріна для прямокутного хвилевода залежать від координат точки джерела поля $r'(x', y')$, а також від координати точки поля $r(x, y)$. Ці координати запишемо за допомогою радіальної координати r , додатково враховуючи, що вершина секторного збуджувача може бути піднята на висоту h :

$$x' = h + r \cos \theta; \quad y' = d \pm r \sin \theta. \quad (8)$$

Вважаємо, що кут θ не перевищує $\pi/2$. Взаємозв'язки (8) дають змогу записати функцію Гріна за допомогою радіальної координати, а у виразі (6) отримаємо інтеграл

$$\int_0^R \sin\left(\frac{m\pi}{A}(d \pm r \sin \theta)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{B}(h + r \cos \theta)\right) \left(1 - \frac{r'}{R}\right) dr = R F_{x1}(m, n). \quad (9)$$

Використовуючи позначення

$$w = \frac{m\pi R}{A} \sin \theta + \frac{n\pi R}{B} \cos \theta; \quad v = \frac{m\pi R}{A} \sin \theta - \frac{n\pi R}{B} \cos \theta; \quad (10)$$

$$W^+ = \frac{m\pi d}{A} + \frac{n\pi h}{B}; \quad W^- = \frac{m\pi d}{A} - \frac{n\pi h}{B},$$

де A, B – ширина і висота перерізу прямокутного хвилевода ($A > B$); d, h – координати вершини збуджувача секторного типу в перерізі хвилевода. Величину $F_{x1}(m, n)$ запишемо у вигляді

$$F_{x1}(m, n) = \frac{1}{2} \sin(W^\pm) \left(\frac{1 - \cos(w)}{w^2} \right) + \frac{1}{2} \sin(W^\mp) \left(\frac{1 - \cos(v)}{v^2} \right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \cos(W^\pm) \left(\frac{1}{w} - \frac{\sin(w)}{w^2} \right) \pm \frac{1}{2} \cos(W^\mp) \left(\frac{1}{v} - \frac{\sin(v)}{v^2} \right). \quad (11)$$

Верхні знаки дійсні для $\theta > 0$ (рис. 2). Векторний потенціал для цього випадку (6) дорівнює

$$A_{x1} = \frac{2\mu_0 I_1 R \cos \theta}{AB} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{\gamma_g} F_{x1}(m, n) \sin\left(\frac{m\pi y}{A}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{B}\right) \exp(-\gamma_g |z|). \quad (12)$$

Вище γ_g – стала поширення для хвилевода; $\epsilon_n = 1$ для $n > 0$; $\epsilon_n = 1/2$ для $n = 0$.

За наведеним вище алгоритмом знаходимо також векторні потенціали A_{x2}, A_{y1}, A_{y2} та вирази для $F_{x2}(m, n), F_{y1}(m, n), F_{y2}(m, n)$. (Останні інтеграли подано у додатку.) Знайдені векторні потенціали використовуються для визначення дотичних до окремих елементів дискретизації напруженостей електричного поля. Нульові граничні умови на поверхні скінченних елементів для електричних напруженостей дають можливість укласти систему неоднорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, які розв'язують методом Гальоркіна [3]. Необхідні при цьому скалярні добутки отримаємо, використовуючи функції розподілу густини струму (1)–(3). Граничні умови забезпечуються на поверхні площинної структури, тобто для $|z| = t/2$, де t – товщина пластини збуджувача ($t \ll R$). Урахуванням товщини площинної структури усувається сингулярність функцій Гріна. Відомі струми в окремих елементах дискретизації структури в сумі дають струм живлення збуджувача і уможливають знайти його вхідний імпеданс.

Приклад аналізу

Відповідно до запропонованого вище алгоритму досліджено площинний збуджувач секторного типу (рис. 1, а) для таких вихідних даних: $B/A=0,44, d/A=0,4, R/B=0,8, t/A=0,025$. Кут у вершині скінченного елемента вибрано величиною θ десять градусів ($\theta = 10^\circ$). Розглянуто складові вхідного імпедансу, нормованого відносно хвильового опору вакууму ($\rho_0 = 120\pi$):

Вхідний реактанс секторного збуджувача знижується за збільшення нахилу збуджувача (кута θ) при практично незмінному опорі.

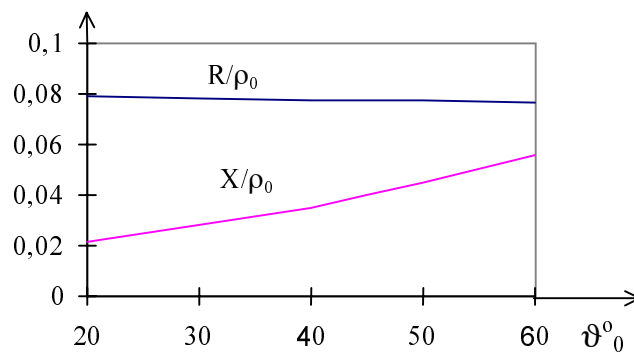


Рис. 3. Залежність вхідного імпедансу від кута у вершині секторного збуджувача

Залежність вхідного імпедансу секторного збуджувача від довжини робочої хвилі (q) має тим довшу резонансну хвилю, чим більший кут у вершині сектора (θ_0). За незмінної робочої хвилі індуктивний реактанс зростає, як показано на рис. 3 ($q=0,6$). Вхідний опір при цьому майже не змінюється. Він залежить від радіуса секторного збуджувача. Такі властивості збуджувача відкривають додаткові можливості для його налаштування і розширення смуги робочих хвиль.

Висновки

Вище виявлено, що вхідний опір збуджувача секторного типу не залежить від кута у вершині збуджувача (θ_0). Але величиною цього кута можна в широких межах змінювати реактанс збуджувача. Запропонована форма скінченного елемента зручна для аналізу не лише площинних трикутних чи структур у вигляді колового сектора, але також структур іншої форми. Наведені тут аналітичні вирази дійсні для поля у прямокутному хвилеводі. Урахування поля конкретної структури забезпечує вищу точність аналізу як узагальнені формули в методі скінченних елементів [4–6].

І. Вахарев С.И., Вольман В.И., Либ Ю.Н. Справочник по расчету и конструированию полосковых устройств. – М., 1982. 2. Zakharia Y.A., Prudyus I.N., Klepher E.L. a.o. An antenna for the orthogonally polarized fields /IV-th International conference on Antenna theory and techniques. 9-12 Sep-

tember 2003, Sevastopol. – Vol. 2. – P. 512–514. 3. Захарія Й.А. Методи прикладної електродинаміки. – Львів, 2003. 4. Sadasiva M. Rao, Donald R. Wilton, Allen W. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape//IEEE Trans. on Antennas and Propagation . vol.AP-30, № 3, May, 1982. – P. 409–418. 5. Allen W. Glisson, Donald R. Wilton. Simple and efficient numerical method for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces//IEEE Tras. on Antennas and Propagation, vol. AP-38, № 5, September 1990. – P. 593–603. 6. Bernard Schiff, Zohar Yoshibash. Eigenvalues for waveguides containing re-entrant corners by a finite element method whith superelements//IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-48, № 2, February 2000. – P. 214–220.

Додаток

Для розрахунку векторних потенціалів від струмів у скінченному елементі, даних виразами (1) і (2), необхідно розраховувати інтеграли по поверхні скінченного елемента. Для струму (1) в напрямку координати x такий інтеграл дано виразами (9) та (11). Аналогічно знайдемо інтеграли $\mathbf{F}_{y1}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, $\mathbf{F}_{x2}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, $\mathbf{F}_{y2}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{x2}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = & \frac{1}{2} \sin(\mathbf{W}^{\mp}) \left(\frac{\sin(\mathbf{v})}{\mathbf{v}} - \frac{1 - \cos(\mathbf{v})}{\mathbf{v}^2} \right) + \frac{1}{2} \sin(\mathbf{W}^{\pm}) \left(\frac{\sin(\mathbf{w})}{\mathbf{w}} - \frac{1 - \cos(\mathbf{w})}{\mathbf{w}^2} \right) \mp \\ & \mp \frac{1}{2} \cos(\mathbf{W}^{\pm}) \left(\frac{\sin(\mathbf{w})}{\mathbf{w}^2} - \frac{\cos(\mathbf{w})}{\mathbf{w}} \right) \pm \frac{1}{2} \cos(\mathbf{W}^{\mp}) \left(\frac{\sin(\mathbf{v})}{\mathbf{v}^2} - \frac{\cos(\mathbf{v})}{\mathbf{v}} \right); \end{aligned} \quad (\text{Д1})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{y1}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = & \frac{1}{2} \cos(\mathbf{W}^{\pm}) \left(\frac{1}{\mathbf{w}} - \frac{\sin(\mathbf{w})}{\mathbf{w}^2} \right) - \frac{1}{2} \cos(\mathbf{W}^{\mp}) \left(\frac{1}{\mathbf{v}} - \frac{\sin(\mathbf{v})}{\mathbf{v}^2} \right) \pm \\ & \mp \frac{1}{2} \sin(\mathbf{W}^{\pm}) \left(\frac{1 - \cos(\mathbf{w})}{\mathbf{w}^2} \right) \mp \frac{1}{2} \sin(\mathbf{W}^{\mp}) \left(\frac{1 - \cos(\mathbf{v})}{\mathbf{v}^2} \right); \end{aligned} \quad (\text{Д2})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{y2}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = & \frac{1}{2} \cos(\mathbf{W}^{\pm}) \left(\frac{\sin(\mathbf{w})}{\mathbf{w}^2} - \frac{\cos(\mathbf{w})}{\mathbf{w}} \right) - \frac{1}{2} \cos(\mathbf{W}^{\mp}) \left(\frac{\sin(\mathbf{v})}{\mathbf{v}^2} - \frac{\cos(\mathbf{v})}{\mathbf{v}} \right) \mp \\ & \mp \frac{1}{2} \sin(\mathbf{W}^{\pm}) \left(\frac{\sin(\mathbf{w})}{\mathbf{w}} - \frac{1 - \cos(\mathbf{w})}{\mathbf{w}^2} \right) \pm \frac{1}{2} \sin(\mathbf{W}^{\mp}) \left(\frac{\sin(\mathbf{v})}{\mathbf{v}} - \frac{\cos(\mathbf{v})}{\mathbf{v}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{Д3})$$

Верхні знаки у наведених формулах відносяться до $\theta > 0$.