

Досліджуючи двочастотні ААГ (рис. 5), було досягнуто асинхронний режим коливань на близьких за значенням частотах. Використання двочастотної генерації в ААГ розширює їх функціональні можливості як приймально-передавальних модулів для радіолокаційних датчиків.

1. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. – М., 1983. 2. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М., 1987. 3. Уткин Г.М. Автогенераторные системы и волновые усилители. – М., 1978. 4. Цараткин Д.П., Строганова Э.П. Асинхронные колебания в двухконтурном автогенераторе при аппроксимации вольт-амперной характеристики полиномом седьмой степени // Радиотехника и электроника. – 1981. – №11. 5. Оплексин Э.И., Рассохин С.С., Сметанин А.И. Экспериментальные исследования двухчастотного генератора на кремниевом ЛПД // Электронная техника. Электроника СВЧ. – 1987. – №5. 6. Голинский В.Д., Прудюс И.Н., Киселичник М.Д. СВЧ-генератор. АС СССР №1223324 А Бюл. №13. – 1986. 7. R.A. Abd-Alhameed, P.S. Excel and E. Elkhazmi desing of integratted-oscillator active microstrip antenna for 2,45 GHz // International Union of Radio Science XXVII General Assembly, Maastricht-2002, 17-24 aug 2002. 8. Нефедов Э.И. и др. Микроразомкнутые излучающие и резонансные устройства. – К., 1990. 9. Голинський В.Д., Прудюс І.Н., Сторож В.Г. Радіолокаційний датчик. Патент України №56686 А. – Бюл. №5. – 2003.

УДК 621.391

Володимир Донець, Юрій Туманов  
ВАТ „Свемон-південь”, дирекція  
ЗАТ „Київстар”, дирекція

## ОПТИМАЛЬНА ЗА ШВИДКОДІЄЮ СИСТЕМА ФАПЧ З АКТИВНИМ ФНЧ І АКТИВНИМ ВЕДЕНИМ ТАКТОВИМ ГЕНЕРАТОРОМ

© Донець Володимир, Туманов Юрій, 2004

Розроблено оптимальну за швидкодією СФАПЧ, об'єкт управління якого подано в вигляді математичної моделі у формі неоднорідного диференційного рівняння другого порядку.

Побудовано алгоритм управління, проаналізовано тривалість оптимального за швидкодією режимів перехідних процесів; динаміку структури фазових траєкторій в топологічному стані оптимальної системи.

In this article the phase-locked loop, object of control is developed optimal on speed which represented by the way to mathematical model as an inhomogeneous differential second-kind equation.

Construction of the control algorithm, analysis of duration optimal on speed of transient modes; the dynamics of phase trajectories structure in a topological status of the optimal system.

### Вступ

Математичні методи оптимальних управлінь широко відомі в літературі, наприклад в [1–5], але різноманіття фізичних об'єктів із своїми особливостями спонукають до все нових досліджень з метою удосконалення і визначення їх специфіки.

Такими технічними об'єктами можуть бути мережі синхронізації телекомунікацій і інформатизаційних інфраструктур, важливим обладнанням яких є ведені пристрої синхронізації (ВПС).

ВПС переважно використовують як бази системи фазового автопідстроювання частоти (СФАПЧ).

Специфікою об'єктів СФАПЧ є наявність управляючого збудження у функції фазової координати системи. Ця специфіка приводить ось до чого:

1) на фазовій площині система має безліч рахункових множин станів рівноваги, із яких стійкі за першим наближенням, переміщуються із нестійкими. Фазова площина системи, що виявляється розділеною на множини областей, які будуть повторятися з тим самим періодом і в яких заключається лише одна точка стійкої рівноваги;

2) при використанні принципу максимуму [2, 3] оптимальні управління в динаміці є не тільки кусково-постійними, а й кусково-періодичними за періодичності управляючих збуджень в статиці.

У цій роботі розроблено оптимальну за швидкодією СФАПЧ з активним інтегруючим фільтром нижніх частот (ФНЧ) та інтегруючим веденим тактовим генератором (ВПС) мереж синхронізації телекомунікацій та інформатизаційних інфраструктур.

### 1. Математична модель СФАПЧ і формулювання задачі у синхронізації цифрових мереж зв'язку

Згідно з [6] одним із розповсюджених ФНЧ на практиці є ідеальний інтегратор на активних ланцюгах (активний фільтр – операційний підсилювач постійного струму з високим коефіцієнтом підсилення) з передавальною функцією (за оператором Лапласа) вигляду

$$K_{\text{ФНЧ}}(p) = \frac{1}{T_{\phi} p}, \quad (1)$$

де  $T_{\phi}$  – стала часу ФНЧ;  $p$  – оператор Лапласа.

Якщо розімкнути СФАПЧ між ФД і ФНЧ (рис. 1) і визнати за управляюче збудження сигналом на виході ФД  $u_{\phi\text{Д}}(t)$ , а  $\varphi(t)$  фазову похибку між сигналами опорного ВТГ і В<sub>д</sub>ТГ, як управляючу величину відповідно до математичної моделі СФАПЧ, то опишемо його неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку з врахуванням виразу (1) у формі

$$\frac{1}{T_1} \cdot \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = u_{\phi\text{Д}}(t) - \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (2)$$

Розпишемо рівняння (2) у вигляді системи:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t) + f(t), \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = u(t), \end{cases} \quad (3)$$

де  $u(t) = T_{\phi} \cdot u_{\phi\text{Д}}(t)$ ;  $f(t)$  – зовнішнє збудження.

На управління  $u(t)$  можна накласти таке обмеження:

$$\bar{u}(t) \leq U = 1. \quad (4)$$

Сформуємо задачу оптимального за швидкодією управління в СФАПЧ виду (3). У фазовому просторі станів системи СФАПЧ потрібно, щоб відображаюча точка, яка переміщає із будь-якого початкового положення  $(\Phi, \Omega)$  до початку координат системи  $(0,0)$  за припустимих управлінь у формі (3), досягала найменшого значення інтегрального критерію оптимальності функціонала вигляду

$$J = \int_{T_0}^{T_k} 1 \cdot dt \longrightarrow \min. \quad (5)$$

### 2. Побудова алгоритму оптимального за швидкодією управління в СФАПЧ та інтерпретація управління

Згідно з принципом максимуму [2, 3] для системи, оптимальної за швидкодією, необхідна наявність таких ненульових безперервних допоміжних функцій  $\Psi_1(t)$ ,  $\Psi_2(t)$ , щоб для всіх  $t$  в

заданому інтервалі  $T_n \leq t \leq T_k$  функція Гамільтона  $H[u(t)]$  в заданій області допустимих значень змінної  $u(t) \in U_\delta(\Phi, t) \in R_m$  досягала максимуму

$$H = H(u, \Psi_1, \Psi_2, \omega, \varphi, f) \quad (6)$$

макс  $u(t)$

з дотриманням умов сталості в часі

$$H(u, \Psi_1, \Psi_2, \omega, \varphi, f) \geq 0. \quad (7)$$

Складемо функцію Гамільтона як суму множень відповідно до допоміжних змінних  $\Psi_1$  і  $\Psi_2$  на праві частини першого і другого рівняння системи (3):

$$H = \psi_1(t)[\omega(t) + f(t)] + \psi_2(t) \cdot u(t) \quad (8)$$

макс  $u(t) \in U_\delta \in R^m$ .

Для знаходження максимуму  $H$  за управляючим збудженням  $u(t)$  необхідно визначити допоміжну функцію  $\Psi_1$  і  $\Psi_2$ :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi(t)} = 0; \\ \frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \omega(t)} = -\psi_1(t). \end{cases} \quad (9)$$

Розв'язком рівнянь (9) є:

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \psi_{10} = const, \\ \psi_2(t) = \psi_{20} - \psi_{10} \cdot t, \end{cases} \quad (10)$$

де  $\psi_{10}$  і  $\psi_{20}$  – відповідно невідомі початкові умови допоміжних змінних  $\Psi_1$  і  $\Psi_2$ .

Максимальна функція Гамільтона (8), тобто управління, яке максимізує гамільтоніан, з врахуванням обмежень (8) і двох останніх систем рівнянь системи (10), отримуємо такий вигляд оптимального алгоритму управління:

$$u(t) = U \operatorname{sign}[\psi_2(t)] = U \operatorname{sign}[\psi_{20} - \psi_{10}t] = \pm U = \pm 1. \quad (11)$$

Для розв'язання задачі аналізу знайдемо аналітичні вирази для розрахунку показників якості оптимальних режимів перехідних процесів і побудову кривої регулювання.

Знайдемо розв'язок системи (3) за довільних умов з врахуванням виразу (3) і  $f(t) = F = const$ :

$$\begin{cases} \varphi(t) = U \cdot \frac{t^2}{2} + UC_2t + C_1, \\ \omega(t) = Ut + C_2. \end{cases} \quad (12)$$

Згідно з теоремою про  $n$  інтервалів [1–3, 5] оптимальний за швидкодією перехідний процес є у вигляді параметричних рівнянь (12) за інтервалами оптимального управління  $\pm U = \pm 1$ , що означає в СФАПЧ можливим лише максимум  $n \leq 2$  інтервалів,  $n$  – порядок системи (2).

Отже, маємо два можливі вирази другого рівняння (10) і два оптимальні управління вигляду (11) на одному інтервалі оптимального руху, а саме:

$$\psi_2(t) = \psi_{20} - \psi_{10}t \quad \text{при} \quad \psi_{20} \geq 0, \psi_{10} \leq 0, -U = -1; \quad (13)$$

$$\psi_2(t) = \psi_{20} - \psi_{10}t \quad \text{при} \quad \psi_{20} \leq 0, \psi_{10} \geq 0, +U = +1 \quad (14)$$

і два оптимальні управління на двох інтервалах оптимального руху:

$$\psi_2(t) = \psi_{20} - \psi_{10}t \quad \text{при} \quad \psi_{20} \leq 0, \psi_{10} \geq 0, -U_{T_1} = -1, +U_{T_2} = +1. \quad (15)$$

$$\psi_2(t) = \psi_{20} - \psi_{10}t \quad \text{при} \quad \psi_{20} \geq 0, \psi_{10} \leq 0, +U_{T_1} = +1, -U_{T_2} = -1. \quad (16)$$

На рис. 1 зображено графіки допоміжної змінної  $\Psi_2(t)$  і оптимального кусково-постійного управління при (а) і двох інтервалах оптимального руху.

Проінтегруємо і визначимо особливості здобутого оптимального алгоритму управління в СФАПЧ у формі (11). Насамперед оптимальний алгоритм характеризується у функції часу. Максимум функції Гамільтона  $H$  в часі використовується за двох умов:

$$\sigma_1(t) = +U = +1, \text{ коли } \psi_{20} - \psi_{10}t > 0 \quad (17)$$

або

$$\sigma_2(t) = -U = -1, \text{ коли } \psi_{20} - \psi_{10}t < 0. \quad (18)$$

Із оптимальних управлінь в СФАПЧ за оптимального за швидкодією управління (11) сигнал на виході ФД повинен бути знакозмінним в часі згідно з виконанням умов вигляду (17) і (18) і змінюватись зі знаком зміни  $\Psi_2(t)$  відповідно до другого рівняння системи (10), як показано, наприклад, на рис. 2, а.

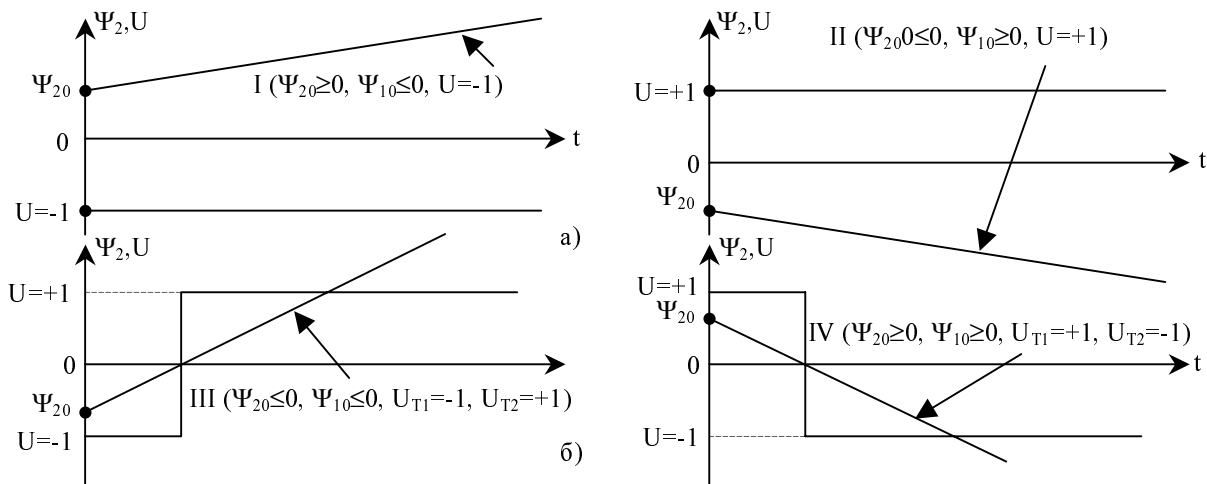


Рис. 1. Графіки допоміжної змінної  $\Psi_2(t)$  і оптимального управління за одного (а) і двох інтервалів руху (б)

Реалізація оптимального закону управління (3) за відтворення фазової похибки (рис. 2) зводиться до припідняття дискретизаційної характеристики  $F[\varphi(t)] = U_{\text{ФД}} \cdot f(\varphi)$  через умову (17) або (18) в напрямку, в якому забезпечується рух зображеної точки СФАПЧ в бік стійкої рівноваги. Таким чином, в динаміці перехідні режими фазових координат  $\varphi$  і  $\omega$  будуть реалізовуватись кусково-постійними управліннями, а в динаміці забезпечуватимуться автоколивання поблизу точки стійкої рівноваги за рахунок періодичності форми характеристики ФД (рис. 2). За умови обмежень вигляду

$$U_{\text{ФД,мін}} \leq u_{\text{ФД}}(t) \leq U_{\text{ФД,макс}} \quad (19)$$

визначається прямокутна характеристика ФД, а якщо взяти інші обмеження, скажімо обмеження на швидкість наростання напруги на виході ФД вигляду

$$U'_{\text{ФД,мін}} \leq \frac{du_{\text{ФД}}(t)}{dt} \leq U'_{\text{ФД,макс}}, \quad (20)$$

то форми характеристик ФД можуть бути гармонічними, трапецієподібними, трикутними тощо.

Моменти зміни знака оптимального за швидкодією управління відповідають переходу через нуль відношення, яке включено під знаком сигнум алгоритму (11). Із цієї обставини виникає ознака, що оптимальна управляюча функція  $u(t)$  може спонукатись не більше ніж однією зміною знака, оскільки за будь-яких знаків і величин сталих інтегрування безперервної і ненульової функції  $\Psi$  вираз під оператором сигнум змінювати знак може не більше одного разу, тобто мати не більше одного дійсного кореня. Ця ситуація наперед визначає проходження оптимальних за швидкодією режимів перехідних процесів не більше ніж за два інтервали оптимального руху, що знаходиться відповідно до теореми про  $n$  інтервалів [1–3, 5].

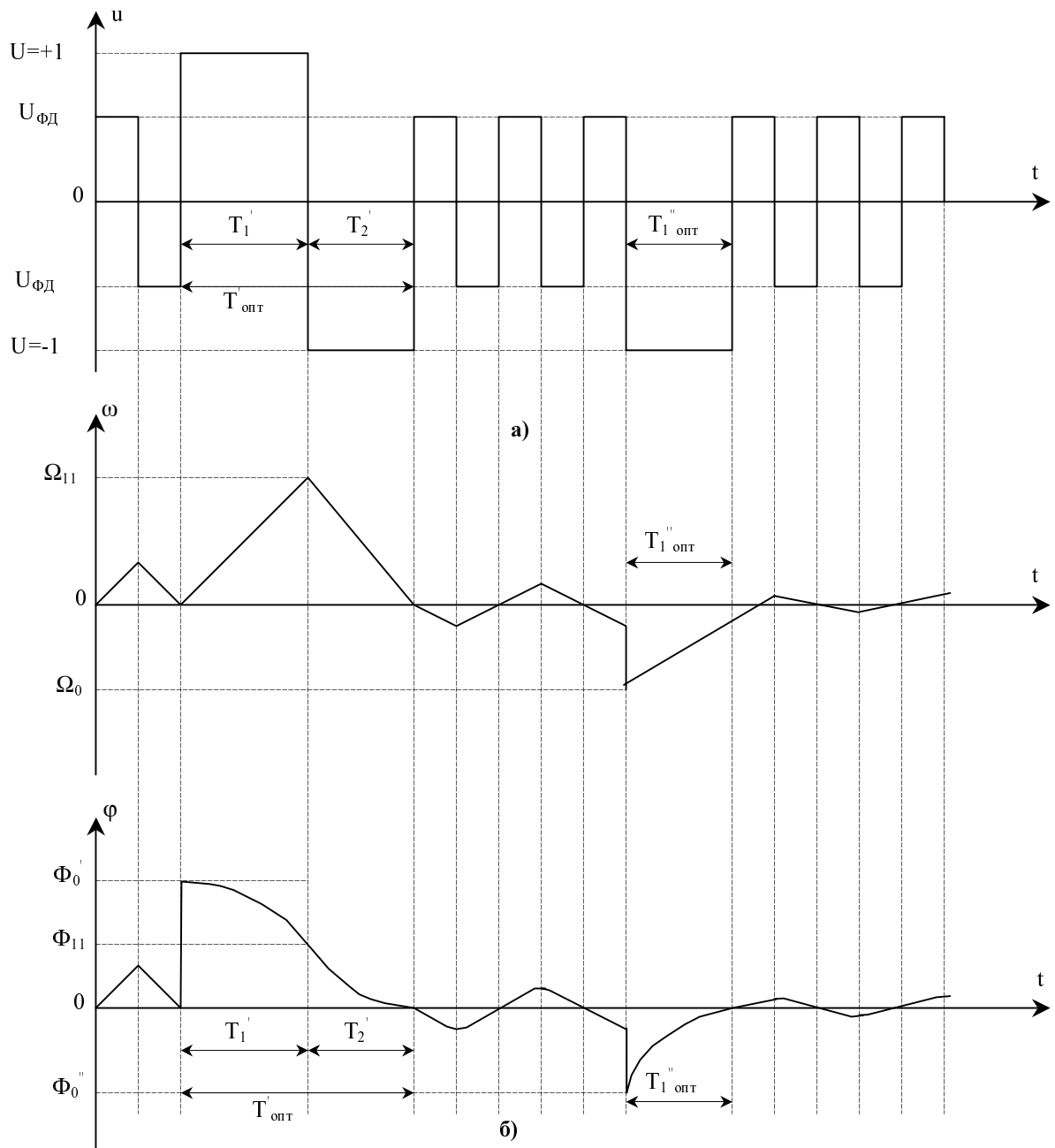


Рис. 2. Кусково-постійна характеристика, що управляється, і характер оптимальних режимів періодичних процесів СФАПЧ з активним фільтром в колі регулювання

### 3. Аналіз тривалості оптимального за швидкістю режимів перехідних процесів

Для розв'язання задачі аналізу знайдемо аналітичні вирази для розрахунку показників якості оптимальних режимів перехідних процесів та побудови кривої регулювання в системі СФАПЧ.

Розв'язок рівнянь системи (3) при довільних початкових умовах з врахуванням виразу (11) матиме вигляд при  $F=const$ :

$$\begin{cases} \varphi(t) = U \operatorname{sign}[\Psi_{20} - \Psi_{10}t] \cdot \frac{t^2}{2} + C_2 \cdot t + C_1, \\ \omega(t) = U \operatorname{sign}[\Psi_{20} - \Psi_{10}t] + t + C_2. \end{cases} \quad (21)$$

Згідно з (21) подамо оптимальний перехідний процес у вигляді параметричних рівнянь за інтервалами оптимального рівняння, оскільки розв'язок (21) справедливий лише для інтервалів сталості знаків виразів за  $n \leq 2$ , які включені під оператором сигнум:

I інтервал оптимального руху в часі

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(t_1) = \pm U \cdot \frac{t_1^2}{2} + C_{21} \cdot t_1 + C_{11}; \\ \omega_1(t_1) = \pm U \cdot t_1 + C_{21}; \\ C_{11} = \varphi(t_1 = t_0 = 0) = \Phi_0 = \Phi \mp U \cdot \frac{(t_1'')^2}{2} - C_{21} \cdot t_1''; \\ C_{21} = \omega_1(t_1 = t_0 = 0) = \Omega_0 = \Omega_1 \mp U \cdot t_1''; \\ \omega(t_1 = t_1' = t_2') = \Omega_1; \varphi(t_1 = t_1' = t_2') = \Phi_1. \end{array} \right. \quad (22)$$

II інтервал оптимального руху в часі

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2(t_2) = \mp U \cdot \frac{t_2^2}{2} + C_{22} \cdot t_2 + C_{12}; \\ \omega_2(t_2) = \mp U \cdot t_2 + C_{22}; \\ C_{12} = \Phi_2 \mp U \cdot \frac{(t_2'')^2}{2} - C_{22} \cdot t_2'' = \Phi_1 \mp U \cdot \frac{(t_1'')^2}{2} - C_{21} \cdot t_1''; \\ C_{22} = \omega_2(t_2 = t_2'' = t_1'') = \Omega_1 \pm U \cdot t_1'' = \Omega_2 \pm U \cdot t_2''; \\ \omega(t_2 = t_2'') = \Omega_2 = 0; \varphi(t_2 = t_2'') = \Phi_2 = 0, \end{array} \right. \quad (23)$$

де  $t_1, t_2$  – миттєвий час відповідно на I і II інтервалах оптимального руху;  $t_1', t_2'$  і  $t_1'', t_2''$  – відповідно початки і кінці першого і другого інтервалів оптимального руху.

В знаках перед управліннями  $U$  вибираються залежно від знака управління ”плюс” або ”мінус” при управлінні типу ”розгін” на першому інтервалі руху; і навпаки, ”мінус” або ”плюс” відповідно до управління типу ”гальма” на другому інтервалі руху.

Тривалість інтервалів оптимальних режимів перехідних процесів можна визначити із рівнянь (22) і (23). Використаємо для розв’язку цієї задачі інші рівняння систем (22) і (23) і знайдемо:

$$T_{1\text{omn}} = t_1'' - t_1' = \left| \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{\pm U} \right| = t_1'', \quad (24)$$

$$T_{2\text{omn}} = t_2'' - t_2' = \left| \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\mp U} \right| = |\Omega_1|. \quad (25)$$

Тривалість усього оптимального перехідного процесу дорівнюватиме

$$T_{\text{omn}} = \sum_{k=1}^{n=2} T_{k\text{omn}} = T_{1\text{omn}} + T_{2\text{omn}}. \quad (26)$$

Отримані формули (21) – (26) дають змогу розраховувати параметри перехідних процесів і визначити їх характер. Конкретні приклади побудови кривих регулювання зображені на рис. 2, б.

#### 4. Динаміка структури фазових траєкторій в топологічному просторі станів оптимальної СФАПЧ

Для повноти визначення руху зображаючої точки в фазовому просторі системи добре знати рівняння проекцій фазових траєкторій на координатні площини  $\varphi, \omega$ . З цією метою виключимо час із рівнянь системи (3) і проінтегруємо з врахуванням (11), і тоді отримаємо рівняння фазових траєкторій координатної площини  $\varphi, \omega$  за інтервалами оптимального руху  $k \leq n \leq 2$ :

$$\frac{\omega_k^2}{2} + F \cdot \omega_k = \pm U \cdot \varphi_k + C_k. \quad (27)$$

Перетворимо рівняння (27) у вигляді

$$\varphi_k = \pm U_k \cdot (\omega_k + F)^2 \mp U_k \cdot (2 \cdot C_k + F^2), \quad (28)$$

де  $C_k$  – стала інтегрування на  $k$ -му інтервалі оптимального руху;

$$U_k = \frac{1}{2} \cdot U. \quad (29)$$

Побудуємо фазовий портрет СФАПЧ, поведінка якої у фазовій площині  $\varphi, \omega$  описується рівнянням (28).

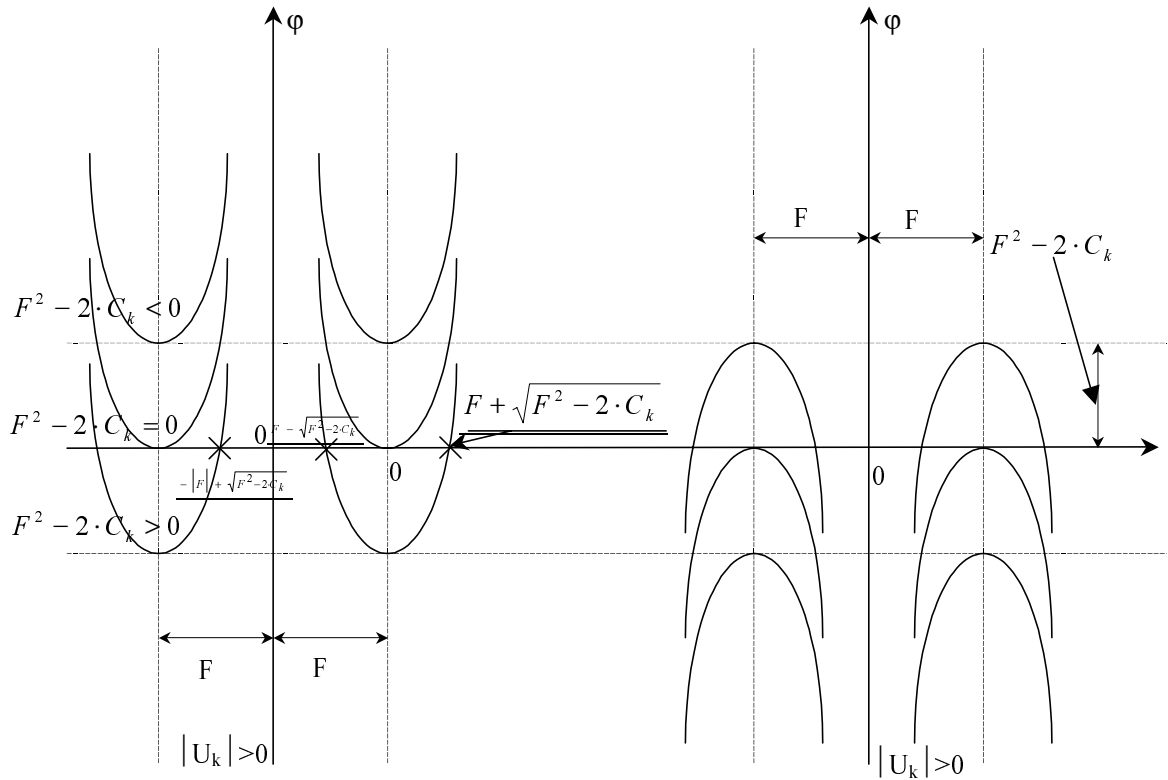


Рис. 3. Фрагменти картини фазових траєкторій на площині  $\varphi, \omega$  за  $|U_k| > 0$  (а) і  $|U_k| > 0$  (б)

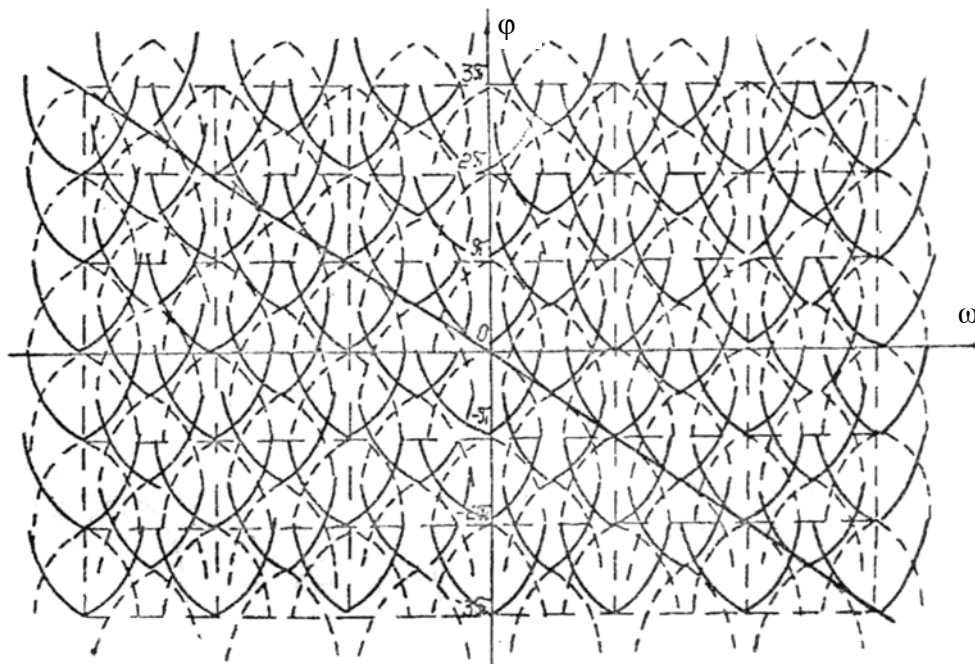


Рис. 4. Інтегральні криві на площині  $\varphi, \omega$

Графіком функції  $\varphi = f(\omega)$  є парабола, яка стоїть по осі ординат на відстані, що дорівнює  $F$ . Вершина параболи має координати  $[F, \pm U_k \cdot (2 \cdot C_k + F^2)]$  і є точкою екстремуму. За  $U_k = +1$  маємо мінімум, а за  $U_k = -1$  – максимум. Вигляд інтегральних кривих показано на рис. 3. Повну картину фазової площини отримаємо в результаті сумісництва інтегральних кривих, які показані на рис. 3 і 4, відповідно фазові портрети зображені на рис. 3.

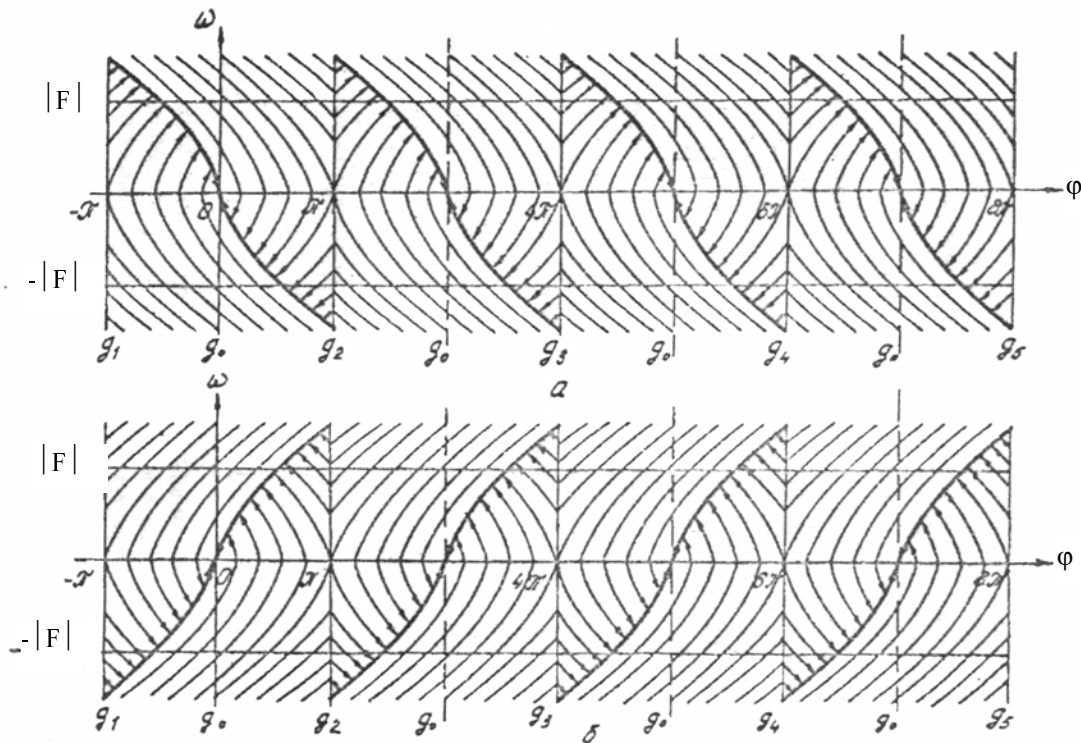


Рис. 5. Фазові портрети оптимальної за швидкодією СФАПЧ з активним ФНЧ в колі регулювання і кусково-періодичною характеристикою ФД

В правильно спроектованій СФАПЧ при подачі регульованого розлаштування, яке створює ФД, фазова похибка і її похідні будуть зменшуватись. Водночас зменшується і початкове розлаштування  $F$ , внаслідок чого зображаюча точка на фазовій площині  $\varphi, \omega$  переміщатиметься від однієї фазової траєкторії на іншу відповідно до рівняння (3), яке за  $F = var$  і  $\pm U_k = var$  описує сім'ю траєкторій. Управляюче збудження створює вертикальну складову, а  $F$  – горизонтальну і вертикальну. Отже, рух відображаючої точки в положення стійкої рівноваги в загальному випадку проходитиме по складній кривій, рівняння якої, як правило, в аналітичному вигляді не уявляється можливим, що ускладнює синтез подібних систем методом фазового простору.

У разі руху від відображаючої точки за параболою, що проходить через точку стійкої рівноваги, задачу можливо розв'язати в аналітичному вигляді. При рівності нулю однієї із змінних  $F$  або  $U_k$  рух відображаючої точки проходить лише в одному напрямку – вертикальному або горизонтальному.

У разі періодичності характеристики ФД з періодом  $T_\varphi = 2\pi$  фазовою поверхнею  $\varphi, \frac{d\varphi}{dt} = \omega$

СФАПЧ є поверхність кругового циліндра [7, 8], розгорткою якого є основні картини інтегрованих кривих. СФАПЧ матиме безліч раз раховану множину станів рівноваги, із яких стійкі за першим наближенням переміщуються з нестійкими [8, 9]. СФАПЧ від різниці фазових просторів звичайних регульованих систем має безкінечну множину цілком рівнозначних станів рівноваги, які відрізняються за миттєвою різницею фаз синхронізованих коливань на величину  $j2\pi, \forall j = 1, 2, \dots, i$ ,



які відповідають нормованій характеристиці ФД  $F[\varphi(t)]$ . Як наслідок, фазова площина системи виявляється розділеною на множини областей, топологія яких описується рівнянням (28), але які будуть періодично повторюватись з таким самим періодом, що дорівнює  $2\pi$ , як це показано на рис. 5. Якщо через точки нестійкої рівноваги провести гіперповерхні

$$g[\varphi(t)] = \varphi(t - c), \quad (30)$$

то тоді фазова площина розбивається на раховану множину часткових областей, в кожній із яких заключається лише одна точка стійкої рівноваги. Ці області однотипні і періодичні. Якщо фазові траєкторії повністю знаходяться у відкритому ядрі початкової області  $G_0$ , то їх попадання в задану околицю точки стійкої рівноваги проходить в межах цієї області. Ясно, що відображаюча точка в загальному випадку може мати таке вихідне положення, що в початковій області не існує оптимальних траєкторій, які переводять її на сусідню оптимальну криву переключення, а мають лише оптимальні траєкторії, які проминають або перетинають границю сусідньої області. В цьому разі принципово неможливе попадання відображеної області в початок координат в границях однієї області. Лише зі зменшенням початкового розлаштування в якійсь із областей відображаюча точка попадає на оптимальну криву переключення, а по останній – в початок координат. Відповідно на площині  $\varphi, \omega$  матимемо дві сім'ї фазових траєкторій  $L^-$  і  $L^+$ . Об'єднавши напівтраєкторії  $L^-$  і  $L^+$ , отримаємо криву  $L_1$ . Серед сімейств кривих  $L_1$  завжди знайдеться по одній нульовій (за  $C_2=0, F=0$ ), яка проходить через точку рівноваги (крива переключення). Вона відділяє напівтраєкторії сімейства з  $u_1$  від напівтраєкторій сімейства  $u_2$ . Для визначеності вважатимемо, що напівтраєкторія  $C_1$  належить сімейству, де знак  $u=+1$ , а  $L_1^-$  -  $u=-1$ . Якщо продовжити аналогічні роздуми для сусіднього інтервалу руху (рис. 5 і 6), отримаємо картину, топологія якої визначається відповідностями вигляду

$$L_2^+ \cup L_1^+ \cup L_0^+ \cup L_1^- \cup L_2^- = L_2^+ \cup L_1 \cup L_2^- = L_2. \quad (31)$$

Якщо розрахувати сумісно в точці переключень рівняння (28) за  $k=1,2$ , отримаємо такий вираз:

$$\pm U_k \cdot (\Omega_1 + F)^2 \mp U_k \cdot (2 \cdot c_1 + F^2) = \mp U_k \cdot (\Omega_2 + F)^2 \pm U_k \cdot (2 \cdot C_2 + F^2). \quad (32)$$

Із (32) знаходимо при  $\Omega_1 = \Omega_2$  (32) координати точки переключення управляючого збудження:

$$\Omega_1^2 + 2 \cdot F \cdot \Omega_1 - (C_1 + C_2) = 0; \quad (33)$$

$$\Omega_1 = -F \pm \sqrt{F^2 - 2 \cdot (C_1 + C_2)}; \quad (34)$$

$$\Phi_1 = \pm U_k \cdot (\Omega_1 + F)^2 \mp U_2 \cdot (2 \cdot C_1 + F^2), \quad (35)$$

де сталі інтегрування рівнянь (28) розв'язуються при  $t=t_n, \varphi_1 = \Phi_{10}, \omega_1 = \Omega_{10}$  і при  $t=t_k, \varphi_2 = \Phi_{20}, \omega_2 = \Omega_{20}$ ;

$$\Phi_{10} = \pm U_k \cdot (\Omega_{10} + F)^2 \mp U_k \cdot (2 \cdot C_1 + F^2), \quad (36)$$

$$\Phi_{20} = \mp U_k \cdot (\Omega_{20} + F)^2 \pm U_k \cdot (2 \cdot C_2 + F^2), \quad (37)$$

$$C_1 = \mp V_k \cdot \Phi_{10} + \frac{\Omega_{10}^2}{2} + \Omega_{10} \cdot F, \quad C_2 = 0, \quad V_k = \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2. \quad (38)$$

Оскільки СФАПЧ має безкінечну множину цілком рівнозначних станів рівноваги, які відрізняються за координатою  $\varphi$  на величину  $2\pi, \forall i = 1, 2, \dots, i$ , відповідних нормованій характеристиці ФД  $F(\varphi)$ , то фазова площина системи виявляється поділеною на множини областей, топологія яких описується відповідностями вигляду (31) і які будуть періодично повторюватись з тим самим періодом, що дорівнює  $2\pi$ , як це показано на рис. 5 та 6. Ясно, що відображаюча точка в загальному випадку, що рухається по оптимальній траєкторії в силу рівняння (28) за  $k=1$  і  $u=\pm 1$ , а потім за оптимальною кривою переключається знову через те саме рівняння за  $k=2$  і  $u=\pm 1$ , попадає в стан рівноваги в якусь із вказаних областей.

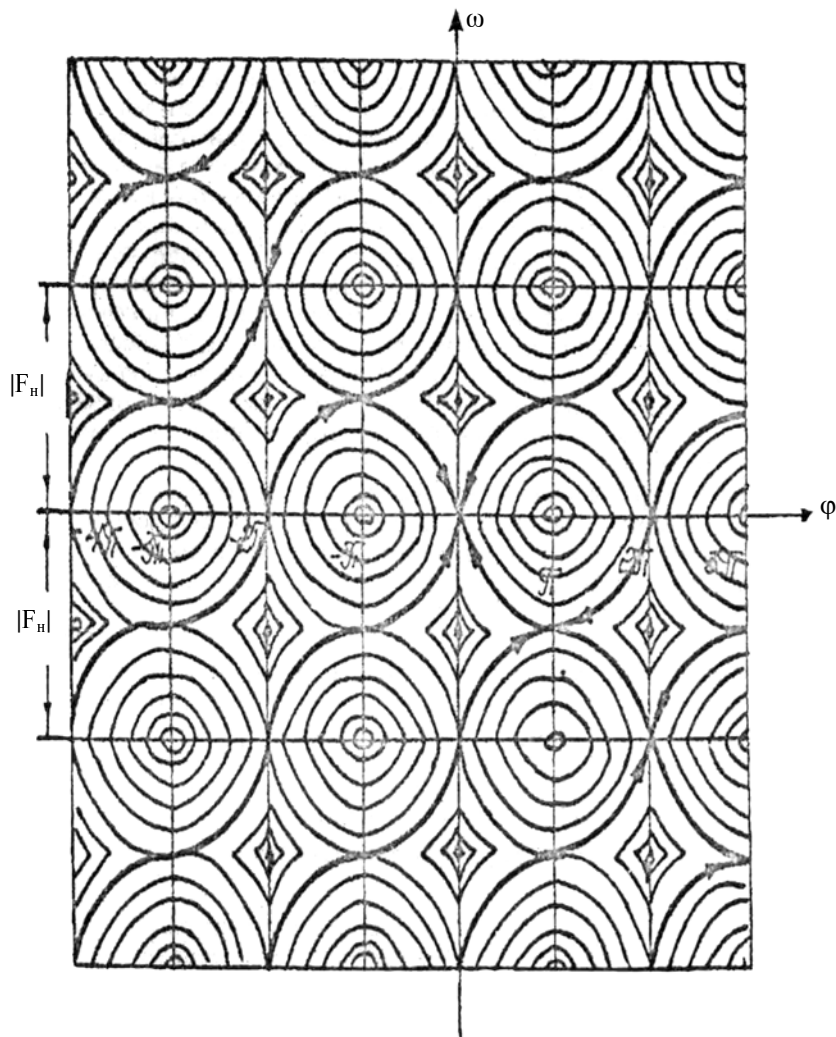


Рис. 6. Фазовий портрет оптимальної СФАПЧ з кусково-періодичною характеристикою ФД

### Висновки

В роботі розглянуто аналіз і синтез оптимальних за швидкодією СФАПЧ з активним інтегруючим фільтром нижніх частот в колі регулювання та інтегруючим підстроюючим веденим тактовим генератором.

Новизною дослідження є врахування наявності періодичного від фазової координати управляючого збудження, яке відсутнє в технічних публікаціях. Розв'язком поставленої специфічної задачі визвано викладені видозміни при використанні принципу максимуму та методу фазової площини.

1. Атанс М., Фалб Л. *Оптимальное управление*. – М., 1968. 2. Болтянский В.Г. *Математические методы оптимального управления*. – М., 1966. 3. Пантрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. – М., 1969. 4. *Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования* / Под ред. проф. В.В. Солодовникова. – М., 1967. 5. Олейников В.А. и др. *Основы оптимального и экстремального управления*. – М., 1969. 6. Бруно С. *Синхронизация цифровых сетей связи* / Пер. с англ. – М., 2003. 7. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. – М., 1959. 8. Шахильдян В.В., Ляховкин А.А. *Системы фазовой автоподстройки частоты*. – М., 1972. 9. Richman D. *The D.C. Quadrifrequency Correlator: a Two Mode Synchronized Systems*. *Proc. IRE*, 1954, 42 1, 288.