

На завершення зазначимо, що цей підхід щодо оцінки апостеріорної надійності може бути застосований лише для порівняння різних систем підтримки прийняття рішення чи систем розпізнавання. Він ґрунтується на реєстрації параметрів, які використовуються в подальшому розрахунку параметра надійності. Відповіді на запитання, наскільки вдало вибрані параметри тієї чи іншої системи, підхід не дає, як не дає він і вичерпної відповіді про вплив спотворюючих чинників.

Висновки

У цій роботі отримано такі результати:

- Встановлено залежність між розміром послідовності правильних об'єктів і кількістю переходів до припинення галуження та до моменту перетворення у нуль коефіцієнта надійності розпізнавання.
- Побудовано вирази для визначення параметра надійності як функції від вектора зовнішніх спотворюючих чинників, вектора відхилень параметрів системи підтримки прийняття рішення та коефіцієнта надійності розпізнавання.
- Отримано графічні залежності коефіцієнта надійності розпізнавання від зміни середнього рівня яскравості та зміни відношення сигнал/шум. Як базовий алгоритм для аналізованої системи підтримки прийняття рішення було використано перетворення Карунена – Лоева. Побудовано залежності параметра надійності від змін спотворюючих чинників та кількості спектральних складових.
- Зроблено опис отриманих графічних результатів.

1. Капустій Б.О., Русин Б.П., Таянов В.А. Про особливості стохастичних характеристик коефіцієнта надійності розпізнавання для об'єктів з класу R^3 // Вісник НУ "Львівська політехніка" "Радіоелектроніка та телекомунікації". – 2003. – № 444. – С. 69–76. 2. Капустій Б.О., Русин Б.П., Таянов В.А. Розподіл середньоквадратичних відстаней між об'єктами в просторі R^2 // Відбір і обробка інформації. – 2003. – Вип. 19(95). 3. Капустій Б.Е., Русин Б.П., Таянов В.А. Новый подход к определению вероятности правильного распознавания объектов множеств. Управляющие системы и машины. – М., 2003. 4. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов / Пер. с англ. – М., 1999.

УДК 621.372.54

Ірина Стрелковська

Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова,
кафедра вищої математики

ПОВНА ЕНЕРГІЯ СЕЛЕКТИВНИХ СИГНАЛІВ З ПАРАМЕТРАМИ, ПОБУДОВАНИХ НА ОСНОВІ СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

© Стрелковська Ірина, 2004

Розглянуто селективні сигнали для випадку інтерполяції їх спектральної щільності кубічним сплайном. Знайдено аналітичний вираз для селективних сигналів, які залежать від параметрів. Отримано вираз повної енергії цих сигналів.

In this paper selective signals for a case of interpolation of their spectral density by cubic spline are considered. We found the analytical expression for the selective signals, which depend on parameters; we've obtained expression of full energy of its signals.

Підвищення спектральної ефективності цифрових телекомунікаційних систем пов'язано з питаннями синтезу сигналів з фінітним спектром, що задовольняють першому критерію Найквіста, який записується у вигляді [1]

$$g(kT) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

де T – тривалість тактового інтервалу.

Функції, які задовольняють умові (1), тобто які мають еквідистантні нулі, називаються селективними сигналами, або імпульсами Найквіста. Однією з переваг таких сигналів є відсутність міжсимвольної інтерференції (МСІ).

Селективним сигналам вигляду (1) відповідає фінітний спектр, аналітичний вираз якого може бути записано в такий спосіб [2]:

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} UT, & |\omega| < \omega_A, \\ G_{\Delta 1}(\omega), & \omega_A \leq |\omega| \leq \omega_C, \\ G_{\Delta 2}(\omega), & \omega_C < |\omega| \leq \omega_B, \\ 0, & |\omega| > \omega_B, \end{cases} \quad (2)$$

де $U = g(0)$; $\omega_A = (1 - \alpha)\omega_C$; $\omega_B = (1 + \alpha)\omega_C$; $\omega_C = \pi/T$; $\alpha = (\omega_C - \omega_A)/\omega_C = (\omega_B - \omega_C)/\omega_C$ – коефіцієнт скруглення спектральної щільності ($0 \leq \alpha \leq 1$), який визначає ширину перехідної області $[\omega_A, \omega_B]$; $2\Delta\omega = 2\alpha\omega_C$ – ширина перехідної області (рис. 1).

Властивості селективних сигналів, зокрема їх поведінка в проміжках між еквідистантними нулями, тісно пов'язані з формою їх спектральної щільності (2) в перехідній області. Особливості цього зв'язку досліджені в [2, 3].

Мета цієї роботи – розробити метод інтерполяції спектральної щільності селективних сигналів з параметрами сплайн-функціями третього порядку; здобути аналітичний вираз цих селективних сигналів та отримати їх повну енергію.

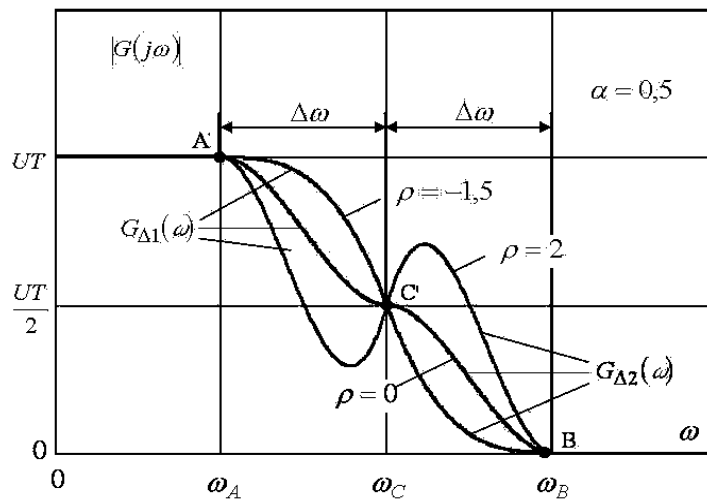


Рис. 1. Ілюстрація інтерполяції спектра кубічним сплайном

Нехай $g(t)$ – селективний сигнал, спектральна щільність якого зображена на рис. 1. Внаслідок відомої симетрії спектральної щільності $|G(j\omega)|$ відносно точки С функції $G_{\Delta 1}(\omega)$ і $G_{\Delta 2}(\omega)$ в (2) пов'язані рівністю [2]

$$G_{\Delta 1}(\omega) = UT - G_{\Delta 2}(2\omega_C - \omega), \quad \omega_A \leq |\omega| \leq \omega_C. \quad (3)$$

Аналітичний вираз для спектральної щільності в перехідній області можна здобути, якщо використовувати метод інтерполяції кусково-кубічними многочленами, який дає можливість неперервно поєднати точки А, В і С.

Як такі многочлени, використовуватимемо кубічні сплайни класу C^2 (кубічні сплайни дефекту 1, які є двічі неперервно диференційованими функціями) [3–5]. Інтерполяційний кубічний сплайн шукатимемо на проміжку $[\omega_C, \omega_B]$, а далі, використовуючи рівність (3), можливо буде поновити вигляд усієї функції $|G(j\omega)|$ в перехідній області.

Тоді поліном $G_{\Delta 2}(\omega)$ між опорними точками ω_C та ω_B визначимо як

$$G_{\Delta 2}(\omega) = y(\omega) = a + b(\omega - \omega_C) + c(\omega - \omega_C)^2 + d(\omega - \omega_C)^3, \quad \omega_C \leq \omega \leq \omega_B, \quad (4)$$

де a, b, c, d – невідомі коефіцієнти, для визначення яких використовуємо умови інтерполяції:

$$\begin{cases} y(\omega_C) = a = y_C; \\ y(\omega_B) = a + b\Delta\omega + c\Delta\omega^2 + d\Delta\omega^3 = y_B; \\ y'(\omega_C) = b = y'_C; \\ y'(\omega_B) = b + 2c\Delta\omega + 3d\Delta\omega^2 = y'_B. \end{cases} \quad (5)$$

Згідно з основними властивостями спектра селективного сигналу (рис. 1), маємо $y_C = 0,5UT$, $y_B = 0$, $y'_C = \rho UT/\Delta\omega$, $y'_B = \gamma UT/\Delta\omega$, де ρ і γ – безрозмірні коефіцієнти.

Після вибору значень похідних у точках інтерполяції, розв'язуючи систему рівнянь (5), знаходимо коефіцієнти a, b, c, d . У кінцевому записі шуканий кубічний сплайн виглядає так:

$$G_{\Delta 2}(\omega) = 0,5UT + \frac{\rho UT}{\Delta\omega}(\omega - \omega_C) - \frac{(1,5 + 2\rho + \gamma)UT}{\Delta\omega^2}(\omega - \omega_C)^2 + \frac{(1 + \rho + \gamma)UT}{\Delta\omega^3}(\omega - \omega_C)^3, \quad (6)$$

$$\omega_C \leq \omega \leq \omega_B.$$

Обернене перетворення Фур'є спектральної щільності (2) з урахуванням (3) і (6) дає можливість здобути аналітичний вираз селективного сигналу $g(t)$. Однак простіше використати співвідношення, які отримані у [2], з урахуванням фінітності спектра селективного сигналу та непарної симетрії спектральної характеристики відносно точки C (рис. 1). Отже, скористаємось інтегральним перетворенням вигляду

$$g(t) = U \frac{\sin \omega_C t}{\omega_C t} \left[1 - \frac{2\omega_C t}{\pi U} X(t) \right], \quad -\infty < t < \infty, \quad (7)$$

де

$$X(t) = \int_{\omega_C}^{\omega_B} G_{\Delta 2}(\omega) \sin[(\omega - \omega_C)t] d\omega, \quad -\infty < t < \infty. \quad (8)$$

Підставляючи (6) у (8), після відповідних перетворень знаходимо

$$X(t) = \frac{UT}{t^4} \left[0,5t^3 + \frac{3 + 4\rho + 2\gamma}{\Delta\omega^2}t + \frac{(3 + 2\rho + 4\gamma)}{\Delta\omega^2}t \times \cos\Delta\omega t + \left(\frac{\gamma}{\Delta\omega}t^2 - \frac{6(1 + \rho + \gamma)}{\Delta\omega^3} \right) \sin\Delta\omega t \right]. \quad (9)$$

Підстановка (9) у (7) призводить до кінцевого результату

$$g(t) = 2U \frac{\sin \omega_C t}{\omega_C t} \left[\frac{6(1 + \rho + \gamma)}{\Delta\omega^3 t^3} \sin\Delta\omega t - \frac{(3 + 2\rho + 4\gamma)}{\Delta\omega^2 t^2} \times (1 + \cos\Delta\omega t) + \frac{2(\gamma - \rho)}{\Delta\omega^2 t^2} - \frac{\gamma}{\Delta\omega t} \sin\Delta\omega t \right]. \quad (10)$$

При $\gamma = 0$ вираз (10) набуде вигляду

$$g(t) = 2U \frac{\sin \omega_C t}{\omega_C t} \left[\frac{6(1 + \rho)}{\Delta\omega^3 t^3} \sin\Delta\omega t - \frac{(3 + 2\rho)}{\Delta\omega^2 t^2} \times (1 + \cos\Delta\omega t) - \frac{2\rho}{\Delta\omega^2 t^2} \right], \quad (11)$$

який отримано раніше в [3].

Селективний сигнал (10) залежить від трьох параметрів – α, ρ, γ . Перший параметр визначає ширину перехідної області $2\Delta\omega = 2\alpha\omega_C$, а з останніми параметрами пов'язана форма спектра в перехідній області. Ці параметри впливають на поведінку $g(t)$ у часовій області.

Подібні сигнали можуть застосовуватися у цифрових телекомунікаціях, зокрема у системах радіодоступу до центрів комутації.

Рис. 2 ілюструє залежність форми селективного сигналу від параметра ρ за $\alpha = 0,3; \gamma = 0$.

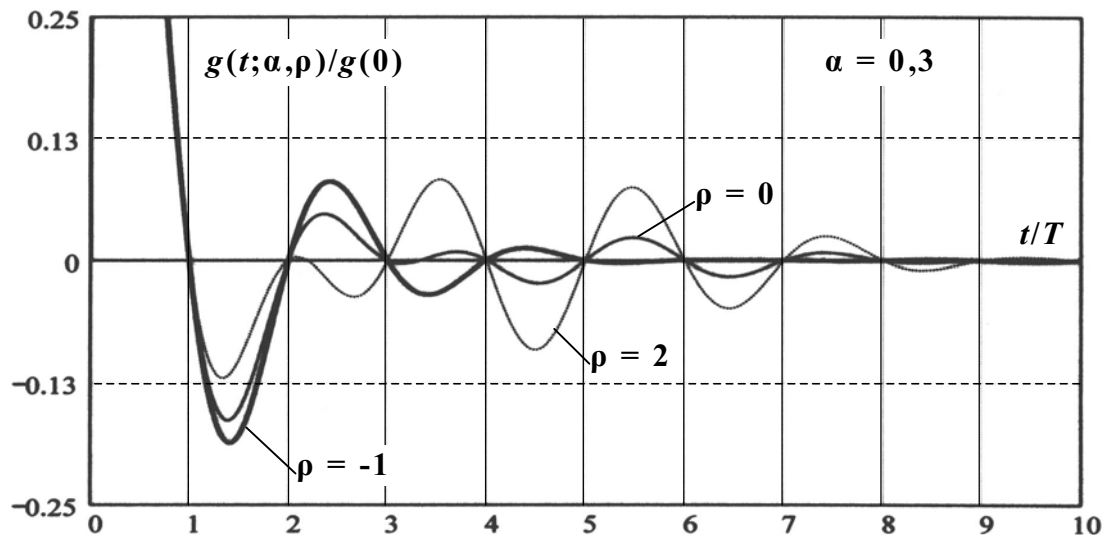


Рис. 2. Залежність форми селективного сигналу від параметра ρ за $\alpha = 0,3; \gamma = 0$

Обчислимо енергію селективного сигналу вигляду (10). Згідно з узагальненою формулою Рейлі (рівність Парсеваля) повна енергія сигналу $g(t)$ визначається за співвідношенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega,$$

де

$$E_t(\alpha, \rho, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt,$$

$$E_\omega(\alpha, \rho, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega$$

повна енергія сигналу $g(t)$ в часовій та частотній областях, відповідно.

Враховуючи симетрію спектральної щільності $|G(j\omega)|$ (2), повна енергія сигналу в частотній області набуде вигляду

$$\begin{aligned} E_\omega(\alpha, \rho, \gamma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} |G(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_B} |G(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\omega_A} (UT)^2 d\omega + \int_{\omega_A}^{\omega_C} G_{\Delta 1}^2(\omega) d\omega + \int_{\omega_C}^{\omega_B} G_{\Delta 2}^2(\omega) d\omega \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Використовуючи (3) та (6), можемо записати, що

$$G_{\Delta 1}(\omega) = 0,5UT + \frac{\rho UT}{\Delta\omega}(\omega - \omega_C) + \frac{UT(1,5 + 2\rho + \gamma)}{\Delta\omega^2}(\omega - \omega_C)^2 + \frac{UT(1 + \rho + \gamma)}{(\Delta\omega)^3}(\omega - \omega_C)^3. \quad (13)$$

Підставляючи вирази (6), (13) у (12), після нескладних перетворень одержимо

$$E_{\omega}(\alpha, \rho, \gamma) = U^2T \left[(1 - \alpha) + \frac{2}{105} \alpha \left(\rho^2 - \frac{13}{4} \rho + 36 + \gamma^2 - \frac{3}{2} \rho \gamma + \frac{11}{2} \gamma \right) \right], \quad (14)$$

де $\alpha \in [0, 1]$, ρ, γ – будь-які дійсні числа.

У [6] була знайдена повна енергія селективного сигналу (10), яка виражається формулою

$$E_{\omega}(\alpha, \rho) = U^2T \left[(1 - \alpha) + \frac{2}{105} \alpha \left(\rho^2 - \frac{13}{4} \rho + 36 \right) \right]. \quad (15)$$

Вираз (15) є окремий випадок виразу (14), тому що отримується з (14) за $\gamma = 0$.

У [6] були знайдені найбільше та найменше значення повної енергії селективних сигналів (11) в частотній області. Найбільшого значення повна енергія (15) селективного сигналу (11) набуває на відрізку M_1M_2 , де $M_1(0, \rho_{\max})$, $M_2(0, \rho_{\min})$, $\rho_{\max} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{11}{5\sqrt{5}}\right) + \frac{3}{4} \approx 4.098076$, $\rho_{\min} = -1,5$ (рис. 3). Воно дорівнює U^2T .

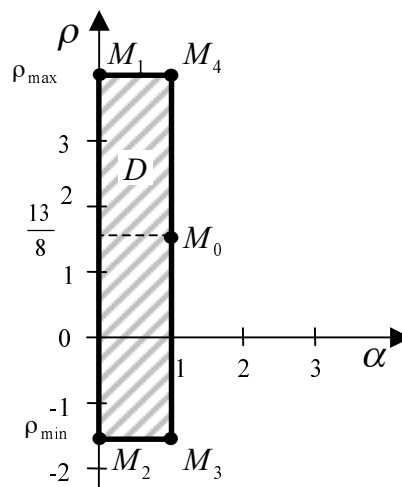


Рис. 3. Область визначення функції $E_{\omega}(\alpha, \rho)$

Найменше значення функції $E_{\omega}(\alpha, \rho)$ досягається в точці $M_0\left(1, \frac{13}{8}\right)$ та дорівнює $\frac{61}{94} U^2T$.

На рис. 4 зображено графік функції $f(\alpha, \rho) = E(\alpha, \rho)/U^2T$ в тривимірному просторі.

Аналогічно можна провести дослідження із знаходження границь зміни повної енергії (14) селективного сигналу спектральної щільності в перехідній області. Ці співвідношення дадуть можливість розрахувати енергетичні показники телекомунікаційної системи на етапі проектування та визначити оптимальну форму сигналу відповідно до вибраного критерію. Але це тема окремої роботи.

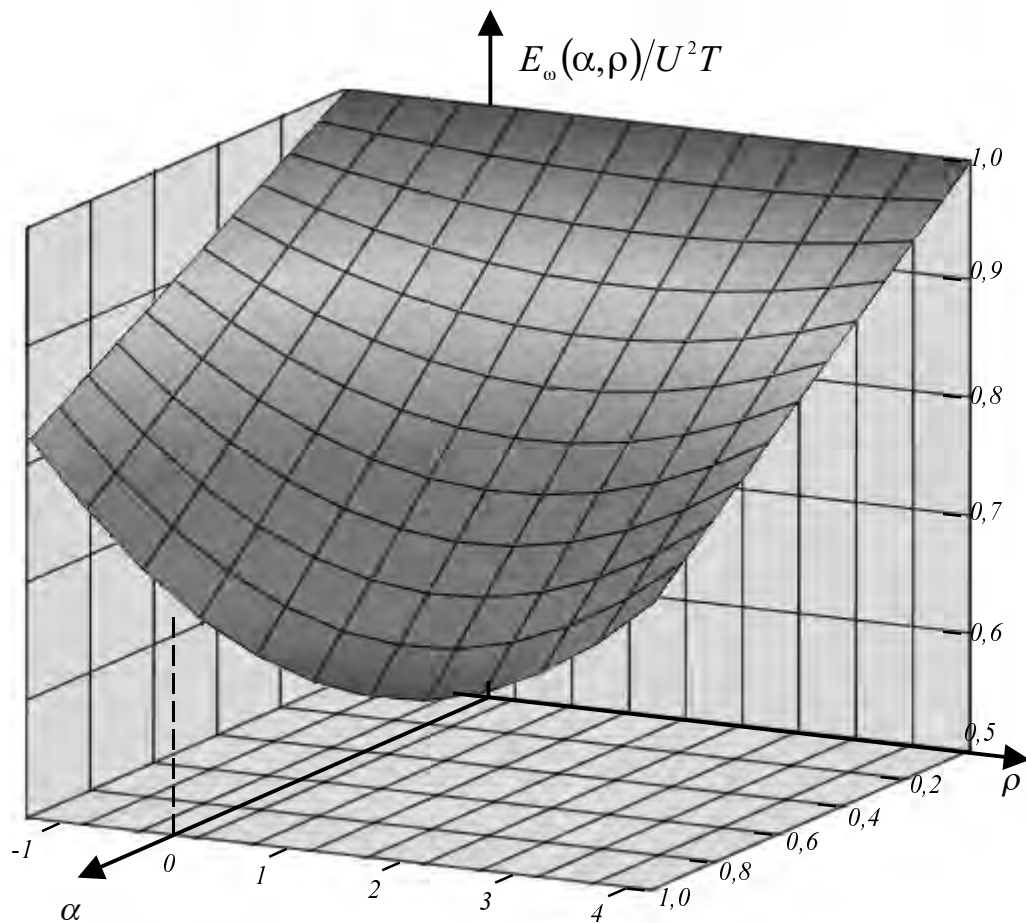


Рис. 4. Зображення графіка функції $f(\alpha, \rho) = E(\alpha, \rho) / U^2 T$

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. 2-е изд. / Пер. с англ. – М., 2003.
2. Сукачев Э.А. Определение формы сигнала, удовлетворяющего первому критерию Найквиста // Радиотехника. – 2001. – Т. 44, – №12. – С. 65–69 (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Сукачев Э.А., Стрелковская И.В. Особенности использования кубических сплайнов для интерполяции спектральной плотности селективных сигналов // Труды VII Международной научно-техн. конф. «Системы и средства передачи и обработки информации», 2–7 сентября 2003, Одесса. – С. 66–67.
4. Заявьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М., 1980.
5. Бабак В.П., Хандецкий В.С., Шрюфер Е. Обробка сигналів. 2-е вид., перер. і доп. – К., 1999.
6. Стрелковская И.В. Исследование на экстремум полной энергии селективных сигналов, построенных на основе кубических сплайнов // Вісник Українського будинку економічних та науково-технічних знань. – 2003. – №2. – С. 161–168.