ефективного застосування в комп'ютерних мережах та телекомунікаційних системах, в тому числі для побудови різних типів автономних сенсорів.

1. Варакин Л. Е. Теория сложных сигналов. – М., 1970. 2. O. Zastavniy Autonomous Sensor for Protection of Telecommunication Stations // The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics. Proceeding of the VIIth International Conference CADSM 2003. – Lviv-Slavsko. Ukraine. 3. Николайчук Я., Король Р. Вертикальна інформаційна технологія в базисі Галуа – новий напрямок у розвитку комп'ютерних машин. – К., 2003. 4. Борков К.В. Малыгин И. Перспективные способы модуляции в широкополосных системах передачи данных. – М., 1999. 6. Melnichuk S.I. Devices with use spread spectrum in radio channels for transfer reception of the data about a condition of the remote objects petroleum - gas production. // Investigation and development of petroleum and gas deposits. – Ivano-Frankivsk. – 1997. – №34. – P. 232–236. 7. Николайчук Я.М., Заставний О.М. Методологія побудови автономних сенсорів для розподілених комп'ютерних мереж // Вісник Технологічного університету Поділля. – Хмельницький. – 2002. – №3. – Т1. – С. 142–146.

УДК 512.86

Богдан Костік
ВАТ "Укртелеком", дирекція первинної мережі

МАТРИЦІ ПРИВЕДЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДО КОАГУЛЬОВАНОЇ ФОРМИ

Знайдено оригінальні матриці лінійного перетворення неоднорідних диференційних рівнянь до чисто діагональної (канонічної) форми для випадку, коли власні значення матриці параметрів різні, і до квазідіагональної форми, що має нормальну жорданову форму, для випадку, коли власні значення матриці параметрів, кратні з елементарними дільниками вище першого порядку. Показано деякі спрощені форми матриць перетворення. Отримані формули мають простий, наочний вигляд і придатні для інженерних розрахунків.

The original matrixes of linear transformation of the inhomogeneous differential equations to the purely diagonal (canonical) form for case are found, when the eigenvalues of a matrix of parameters are various; and to the quasidiagonal form having the normal Jordan form, for case, when the eigenvalues of a matrix of parameters multiple with elementary dividers are higher than the first order. Some simplified forms of transformation matrixes are shown. The obtained formulas have idle time, a visual aspect and are suitable for engineering calculations.

Розглянемо матричне диференційне рівняння

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + KV(t), \tag{1}$$

де X(t), $\frac{dX(t)}{dt}$ – n-мірні матриці-стовпці шуканих змінних і їхніх похідних; A – квадратна матриця порядку *n* постійних дійсних коефіцієнтів або заданих функцій деякої незалежної змінної (параметра); V(t) – m-мірна матриця-стовпець зовнішніх збуджень; K(t) – матриця сталих дійсних коефіцієнтів або відомих функцій незалежної змінної; t – незалежна змінна (параметр).

Досліджуючи стійкість рішень рівнянь такого виду, при аналізі перехідних процесів, при розрахунку автоколивальних режимів, а також у деяких інших випадках за допомогою відомого в математичній літературі лінійного матричного перетворення

$$Y(t) = CX(t) \tag{2}$$

рівняння (1) приводять до коагульованої форми

$$\frac{dY(t)}{dt} = BY(t) + MV(t), \tag{3}$$

де $Y(t)$, $\frac{dY(t)}{dt}$ – матриця-стовпець розміру n нових шуканих змінних і їхніх похідних; Y – коагульована матриця; М = СК; З – квадратна матриця перетворення порядку n.

Передбачається, що матриця (3) не вироджена (det C # 0 і $X(t) = C^{-1} Y(t)$, C^{-1} – зворотна матриця).

У рівнянні (3)

$$B = CAC^{-1}. \tag{4}$$

Проводячи подібні дослідження рішень диференційних рівнянь виду (1), необхідно вміти будувати матриці перетворення С. Відомі загальні методи виконання такої побудови. У цій роботі отримані найбільш прості і наочні формули визначення елементів матриць перетворення.

Надалі обмежимось розглядом класу задач, для яких матриця А має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & ... & 0 \\ . & . & . & . & ... & . \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & ... & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

де a_i, $\forall\ i = \overline{0, n-1}$ – сталі коефіцієнти (параметри) однорідного диференційного рівняння;

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + ... a_1\frac{d\,x}{dt} + a_0 = 0, \tag{6}$$

де n – порядок диференційного рівняння.

Рівнянню (6) відповідає характеристичний поліном

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + ... + a_1 p + a_0 = 0 \tag{7}$$

з коренями p_j, $\forall\ j = \overline{1, n}.$

У перетворенні рівняння (1) у рівняння (3) вибираємо матрицю С так, щоб коагульована матриця В мала квазідіагональний (канонічний) вигляд

$$\frac{dY(t)}{dt} = \left[E^j_{k1}(p_1),..., E^j_{kn}(p_n)\right]\cdot Y(t) + MV(t). \tag{8}$$

Тут $p_1,...,p_n$ – власні значення матриці А; Е – одинична матриця.

Для зручності розв'язання поставленої задачі виділимо два випадки:

1) власні значення матриці A різні, дійсні, комплексні (серед них можуть бути і кратні, котрим відповідають прості елементарні дільники);

2) власні значення матриці A дійсні, комплексні, кратні, котрим відповідають елементарні дільники вище першого порядку.

Для першого випадку коагульована матриця B здобуває чисто діагональну (канонічну) форму, що позначається матрицею $P_д$, діагональними елементами якої будуть власні значення матриці A, а саме: $P_Д = \left[p_i \delta_{ji}\right]^n$, де δ_{ji} – символ Кронекера.

Розписавши докладніше матричне рівняння (4), одержимо систему з n^2 алгебраїчних рівнянь. Розв'язуючи їх з урахуванням залежності елементів матриці A з її власними значеннями, знайдемо матрицю перетворення $c_м$, $c_{мs}$, елемент якої має вигляд

$$c_{Ms\ell} = (-1)^{\,n-\ell} \cdot \sum_{\substack{i,j,\ldots,k=1;\, i<j<\ldots k;\\ i,j,\ldots,k\neq s}}^{n} \left[C_{n-1}^{n-\ell}(p_i, p_j, \ldots, p_k)\right] \forall\, s = 1,2,\ldots,n;\ \ell = 1,2,\ldots,n, \tag{9}$$

де $C_{n-1}^{n-\ell}$ позначає кількість сполучень з (n–1) елемента по (n–ι). З усієї можливої кількості всіх сполучень береться одне будь-яке і виконується сумування від i,j,...,k=1 до n з обов'язковим виконанням умов, щоб i,j,...,k#s і i<j<...<k, тобто доданки сум з індексами, рівними s, не беруться, пропускаються також усі доданки, для яких i,j,...,k розташовані не в зростаючому порядку.

Для другого випадку коагульована матриця B набуває квазідіагональної форми, що позначається $P_{КД}$ і яка має нормальну жорданову форму: $P_{КД} = \left[E_{ki}^d(p_i)\delta_{ji}\right]^n$, у якій по головній діагоналі розташовані жорданові клітинки $E_{k1}^d(p_1),\ldots, E_{ki}^d(p_i),\ldots, E_{kn}^d(p_n), \forall\, 1 \le k \le n$; а інші елементи матриці $P_{КД}$ дорівнюють нулеві. Кількість жорданових клітинок k дорівнює числу різних елементарних дільників. Кожна клітинка $E_{ki}^d(p_i), \forall\, i = 1,2,\ldots,n$ являє собою квадратну матрицю, порядок якої дорівнює ступеню d елементарного дільника $(p - p_i)^d$, що відповідає кратному власному значенню матриці A $p_i, \forall\, i = 1,2,\ldots,n$, а саме:

$$E_{1ki}^d(p_i) = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} p_i & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & p_i & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_i & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & p_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & p_i \end{bmatrix}}_{d\ \text{–стовпців}}\right\} d - \text{рядків} \tag{10}$$

або

$$E_{2ki}^d(p_i) = \begin{bmatrix} p_i & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & p_i & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_i & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & p_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & p_i \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Якщо деякому власному значенню матриці А відповідає кілька елементарних дільників, то і відповідна кількість клітинок у жордановій формі матиме на головній діагоналі той самий елемент. Елементарним дільникам першого ступеня (перший випадок) відповідають клітинки першого порядку, тобто матриці (10) і (11) матимуть чисто діагональний вигляд матриці $P_д$.

Складаючи за виразом (4) відповідну систему з n^2 алгебраїчних рівнянь і аналогічно до попереднього випадку розв'язуючи її, знайдемо матриці перетворення $C_{K1KД}$ і $C_{K2KД}$ для однієї жорданової клітинки вигляду (10) і (11), елементами яких будуть

$$c_{k1s\iota} = 0,\ \forall\ s<\iota;$$
$$c_{k1s\iota} = 1,\ \forall\ s=\iota;$$
$$c_{k1s\ell} = (-1)^{d-\ell} \cdot p_i^{d-\ell} \cdot C_{d-1}^{d-\ell}, \forall\, s = 1,2,...,d;\ \ell = 1,2,...,d,\ \forall\ s<\iota \tag{12}$$

або

$$c_{k2s\iota} = 0,\ \forall\ s=d-j;\ \iota=j+\alpha;\ \alpha=2,3,...,d;$$
$$c_{k2s\iota} = 1,\ \forall\ s=d-j;\ \iota=j+1;$$
$$c_{ks\ell} = (-1)^{d-\ell} \cdot p_i^{d-\ell} \cdot C_{d-1}^{d-\ell}, \forall\, s = d - j;\ \ell = j+\alpha;\ \alpha = 0,-1,-2,...,-d+2;\ j = 0,1,2,...,d-\alpha, \tag{13}$$

де p_i, $\forall$ i=1,2,...,d – *i*-і кратне власне значення матриці А, якому відповідає елементарний дільник *d*-го порядку; $C_{d-1}^{d-\ell}$ – кількість сполучень з (*d–1*) елемента по (*d–ι*).

Отриману згідно з формулою (9) матрицю перетворення можна істотно спростити, якщо застосувати до неї ліві і праві елементарні операції. У цьому разі вона набуває простого (трикутного) вигляду. $c_{ys\iota}$ елемент спрощених (трикутних) матриць перетворення c_y матиме вигляд

$$c_{ys\ell\Delta} = 1, \forall\, s = \ell;$$
$$c_{ys\ell\Delta} = \frac{p_s^{s-\ell}\prod_{i=\ell}^{s-1} p_i}{\prod_{i=\ell}^{s-1}(p_i - p_s)}, \forall\, s < \ell; \tag{14}$$
$$c_{ys\ell\Delta} = 0, \forall\, s > \ell;\ s = 1,2,...,n;\ \ell = 1,2,...,n$$

або

$$c_{ys\ell\Delta} = \frac{1}{\prod_{i=s+1}^{\ell}(p_s - p_i)}, \forall\, s > \ell; \tag{15}$$
$$c_{ys\ell\Delta} = 1, \forall\, s = \ell;$$
$$c_{ys\ell\Delta} = 0, \forall\, s < \ell;\ s = 1,2,...,n;\ \ell = 1,2,...,n\ .$$

Отримані формули (9), (12), (13), (14), (15) дають змогу інженерові приводити матричні диференціальні рівняння вигляду (1), що описують динаміку складних електричних кіл, до більш простої коагульованої форми (3), а, отже, спрощувати їхній розв'язок. Цей прийом істотно полегшує аналіз перехідних процесів в електричних ланцюгах, розрахунок автоколивальних режимів тощо.

Зазначені формули для визначення елементів матриці перетворення (2) серед відомих у математичній літературі мають найбільш простий і наочний вигляд.

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М., 1966. 2. Mesarovic M. D. The Control of Multivariable Systems. John Willey, New York–London, 1960. 3. Bellman R., Glickberg J., Cross O. Same Aspects of the Mathematical Theory of Control Processes.-Repont 313, Rand Corporation, 1959. 4. Greybill G. P. The convertion of the block diagram, El. Enginiring, v. X, II, 1951. 5. Оптимизация структур больших систем // В.И. Борщ, В.А. Донец, В.В. Коваль, А.Я. Лейбзон, И.П. Лесовой. – К., 2000.