

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ АНАЛІЗУ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ ПРИСТРОЇВ СИНХРОНІЗАЦІЇ

© Бондарев Андрій, 2004

Пропонується підхід до аналізу завадостійкості пристроїв синхронізації, який дає змогу визначити фізичну границю можливості синхронізації під впливом шумів та уніфікувати аналіз впливу випадкових та детермінованих завад.

An approach to analysis of sync devices noise immunity, which allow to determinate physical limit of sync possibility under the influence of noise and to unify the analysis of stochastic and determinate disturbances influence, is proposed in this paper.

Вступ

Сучасні приймачі радіосигналів містять пристрої синхронізації, які визначають якість і саму можливість прийому сигналів на фоні завад. Класичні означення завадостійкості [1] і [2] та методи її аналізу ґрунтуються на визначенні кількісних імовірнісних показників точності прийому сигналу. Недоліками такого підходу є необхідність апріорного завдання гранично допустимої ймовірності похибки, використання складного математичного апарату аналізу розподілу ймовірностей та принципова несумісність з аналізом впливу детермінованої завади як за методами, так і за формою подання результатів. У цій роботі пропонується підхід до аналізу завадостійкості пристроїв синхронізації, який дає можливість визначити фізичну межу можливості синхронізації під впливом шумів та уніфікувати аналіз впливу випадкових та детермінованих завад.

1. Подання випадкових процесів у лінійних динамічних системах

Математичною моделлю динамічної системи першого порядку під впливом шуму є стохастичне рівняння

$$dx/dt = -F(x) + n(t) = -dU(x)/dx + n(t), \quad (1)$$

де $F(x)$ – коефіцієнт зносу; $U(x)$ – потенціальна функція; $n(t)$ – випадкове збудження з кореляційною функцією $\langle n(t)n(t-\Delta t) \rangle = N\delta(\Delta t)$.

Розв'язок рівняння (1) подають як ансамбль реалізацій або як змінний в часі розподіл імовірності $W(x,t)$, який задовольняє рівнянню Фокера–Планка

$$\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(F(x) \cdot W(x,t) + \frac{N}{2} \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right). \quad (2)$$

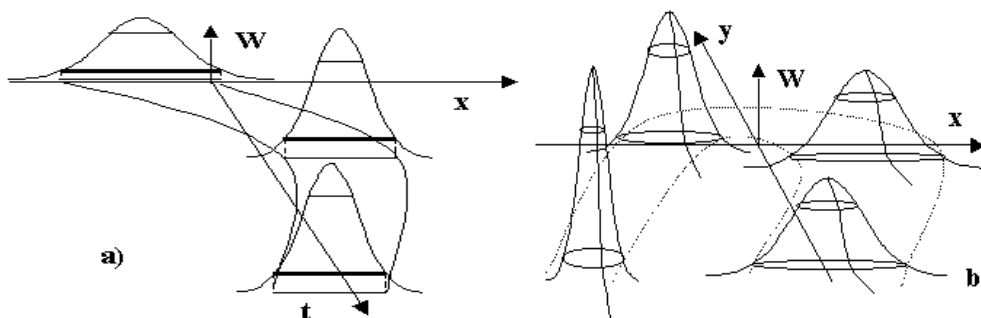


Рис. 1. Подання випадкових процесів перетинами

Поведінка системи еквівалентна поведінці важкого газу з температурою $N/2$ на потенціальній поверхні $U(x)$. Реалізації $x(t)$ описують броунівський рух молекул, а розподіл $W(x,t)$ – густину газу. Густину розподілу в кожний момент часу можна описати як набір значень $W(x)$ або як набір перетинів прямими $W(x)=\text{const}$. Для одновимірного розподілу перетином є дві точки з абсцисами " x_1 " та " x_2 " (рис. 1, а). Для описання поведінки розподілу запровадимо поняття "потенціал точок перетину".

Означення 1. Потенціал точки перетину – значення потенціальної функції в точці, абсциса якої дорівнює абсцисі точки перетину.

Оскільки при заданій формі розподілу всі перетини подібні, то для опису усього розподілу достатньо задати тільки один з них. Для вибору найбільш інформативного перетину розглянемо стаціонарний розв'язок рівняння (2)

$$W_{st}(x) = A \exp(-2U(x)/N), \quad (3)$$

де $A^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2U(x)/N) dx$ – нормуючий множник. Максимальне значення густини $W_{\max}=A$, а в точках " x ", в яких потенціальна функція дорівнює енергії збудження, значення густини імовірності становить e^{-2} від максимального:

$$(U(x) = N) \Rightarrow W(x)/W_{\max} = e^{-2} \approx 0,135 \approx 1/7,34. \quad (4)$$

Означення 2. Характерний перетин розподілу – перетин на рівні $1/e^2$ від максимального значення.

Теорема 1. Потенціал усіх точок усталеного характерного перетину дорівнює енергії збудження.

Справедливість теореми для довільних потенціальних функцій $U(x)$ впливає з означень 1 і 2 та рівняння (3).

Характерний перетин однозначно описують координата його центра " x_0 " і характерне відхилення " Δx ":

$$x_0 = (x_1 + x_2)/2; \quad \Delta x = |x_2 - x_1|/2. \quad (5)$$

Характерне відхилення " Δx " пропорційне до середньоквадратичного " σ " з коефіцієнтом, наведеним в табл. 1 для різних типових розподілів.

Таблиця 1

Співвідношення характерного і середньоквадратичного відхилення для різних розподілів

Розподіл	Гауссів	Експоненційний	Рівномірний
$k = \Delta x / \sigma$	2	$\sqrt{2} \approx 1,41$	$\sqrt{3} \approx 1,73$

Запроваджені поняття дають змогу моделювати випадковий процес, описаний рівняннями (1) і (2), поведінкою пружного стрижня, кінці якого (точки характерного перетину) невідривно ковзають без тертя по потенціальному рельєфу (рис. 2, а), а недеформований розмір становить $2\Delta x_{st}$, причому усталене характерне відхилення задовольняє рівнянню

$$U(\Delta x_{st}) = N. \quad (6)$$

При різноманітних початкових положеннях і розмірах стрижня (1, 2, 3 на рис. 2, а) його центр прямує до значення $x_0 = 0$, а розмір – до недеформованого. Відповідні часові залежності абсцис характерного перетину показано на рис. 2, б, а еволюції розподілів – на рис. 3.

Для лінійної динамічної системи коефіцієнт зносу і потенціальна функція становлять

$$F(x) = a \cdot x; \quad U(x) = a \cdot x^2/2. \quad (7)$$

З геометричної побудови на рис. 2, а або розв'язку рівняння (6) знаходимо усталене середньоквадратичне відхилення σ_{st} :

$$\sigma_{st} = \Delta x_{st} / 2 = \sqrt{N/(2a)}. \quad (8)$$

Результат (8) широко відомий, але запроваджені поняття роблять його наочним, а процедуру отримання – легкою.

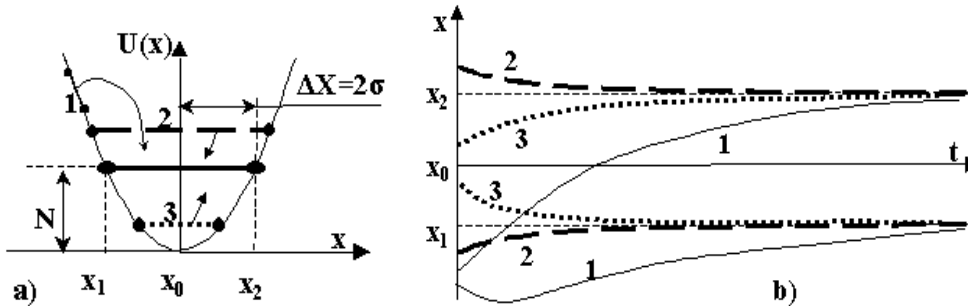


Рис. 2. "Стрижнева" модель випадкового процесу

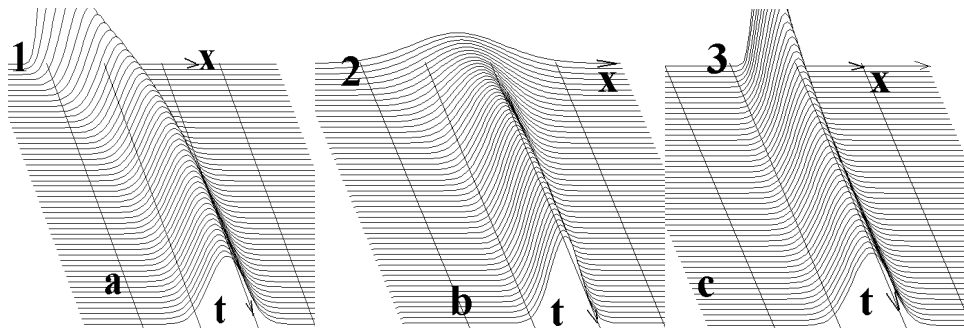


Рис. 3. Еволюція розподілу густини імовірності

При від'ємному коефіцієнті "а" у виразі (7) точка $x=0$ є точкою нестійкої рівноваги, а потенціальна функція в цій точці є максимальною. "Стрижнева" модель дала змогу сформулювати теореми про поведінку розподілу в околі нестійкої точки (наводимо без доведення).

Теорема 2. Якщо точки характерного перетину охоплюють точку рівноваги, то їх рух спрямований в протилежних напрямках.

Теорема 3. Перетин може досягти точки нестійкої рівноваги тільки за умови, що різниця потенціалів нестійкої точки і центра початкового розподілу менша від енергії збудження.

"Стрижнева" модель є зручною для якісного опису еволюції розподілу. Кількісну оцінку дає кумулянтний аналіз, який уможливує перейти від рівняння (1) до рівнянь дрейфу кумулянтів [3]:

$$\begin{cases} dm/dt = -\langle F(x) \rangle; \\ dD/dt = -2\langle xF(x) \rangle + 2m\langle F(x) \rangle + N, \end{cases} \quad (9)$$

де m – середнє значення; D – дисперсія процесу $x(t)$; кутові дужки означають усереднення по ансамблю реалізацій.

З урахуванням рівнянь (7) для лінійної системи рівняння (9) набувають вигляду

$$dm/dt = -a \cdot m; \quad dD/dt = N - 2aD \quad (10)$$

і є точними, оскільки лінійні системи нормалізують розподіл випадкових процесів. Зокрема, криві на рис. 2, б отримані з розв'язків рівнянь (10), причому

$$x_0 = m; \quad x_1 = m - 2\sqrt{D}; \quad x_2 = m + 2\sqrt{D}. \quad (11)$$

Для нелінійних систем або негауссівських початкових розподілів рівняння (9) і (11) описують еволюцію "модельного" розподілу, який точно відображає положення і розмір характерного перетину, однак похибка оцінки середньоквадратичного відхилення згідно з табл. 1 може сягати 30 %. В задачах аналізу граничних можливостей пристроїв синхронізації форма розподілу не відіграє істотної ролі.

Математичною моделлю стохастичної динамічної системи другого порядку є рівняння

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} U(x, y) + B \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

де B – квадратна матриця; n_1, n_2 – незалежні δ -корельовані процеси.

Характерний перетин двовимірного розподілу $W(x, y)$ згідно з означенням 1 є замкнутою кривою (рис. 1, b), а для нормального розподілу – еліпсом, точки якого задовольняють рівнянню

$$\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} = 4(1 - r^2), \quad (13)$$

де $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$ – середні значення і середньоквадратичні відхилення компонент випадкового процесу (x, y) ; r – коефіцієнт кореляції.

Усі точки усталеного характерного перетину (13) мають однаковий потенціал, який згідно з теоремою 1 дорівнює енергії збудження.

Знаходження потенціальної функції $U(x, y)$ системи другого порядку вимагає афінних перетворень рівняння (12), які маскують фізичну сутність фазових змінних. Тому в теорії коливань стан системи другого порядку зображають траекторіями точки на фазовій площині. Стан стохастичної системи на фазовому портреті відображає поведінка характерного перетину (13). Поведінка замкнутої кривої на площині складніша, ніж поведінка точки. Для опису перетину необхідні координати центра (положення), характерні відхилення вздовж осей (розміри), нахил головних осей еліпса. Ці параметри однозначно пов'язані зі статистичними характеристиками розподілу, які входять у рівняння 13. Перетин може також обертатися при незмінних розмірах і положенні. Обертання контуру "1" характеризує його спін (обертювий момент)

$$S = \oint_1 \vec{F}(x, y) d\vec{l}. \quad (14)$$

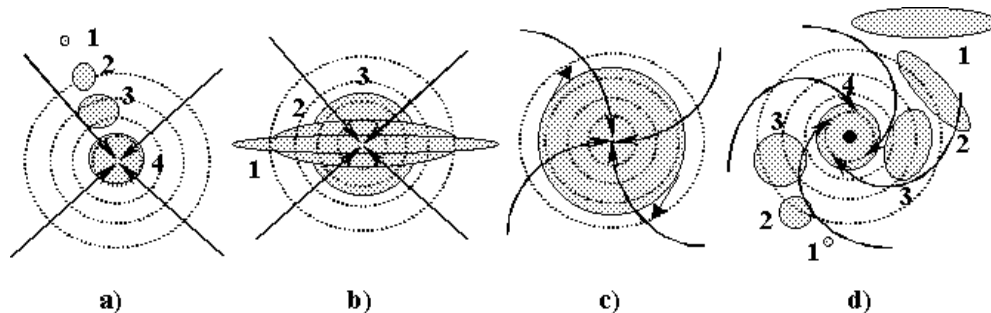


Рис. 4. Поведінка перетину в околі стійкого фокуса і вузла

Фазовий портрет лінійної системи містить тільки одну особливу точку: стійкий або нестійкий вузол або фокус, або сідло. Особливості поведінки характерних перетинів в околі стійких особливих точок показані на рис. 4. Еквіпотенціальні лінії показані пунктиром. В околі стійкого вузла координати центра прямують до вузла, а розмір – до усталеного значення, яке залежить від енергії збудження. Спін усталеного перетину може бути нульовим (рис. 4, а і 4, b) або ненульовим (рис. 4, c). В околі стійкого фокуса (рис. 4, d) положення і розмір є глобально стійкими, спін – ненульовий. В околі нестійкого вузла або фокуса (рис. 5) розмір перетину завжди нестійкий, центр нерухомий тільки за точного збігу з особливою точкою, рух діаметральних точок перетину може бути односпрямованим (рис. 5, а) або протилежно спрямованим (рис. 5, b) згідно з теоремами 2 і 3. В околі сідла (рис. 6) усталеного перетину не існує. Розмір вздовж вхідних сепаратрис є стійким, вздовж вихідних – нестійким. При торканні характерним перетином вхідної сепаратриси (якої стосуються умови теорем 2 і 3) координати граничних точок зростають до $\pm\infty$ (рис. 6, b), а за відсутності торкання (рис. 6, a) залишаються обмеженими з одного боку.

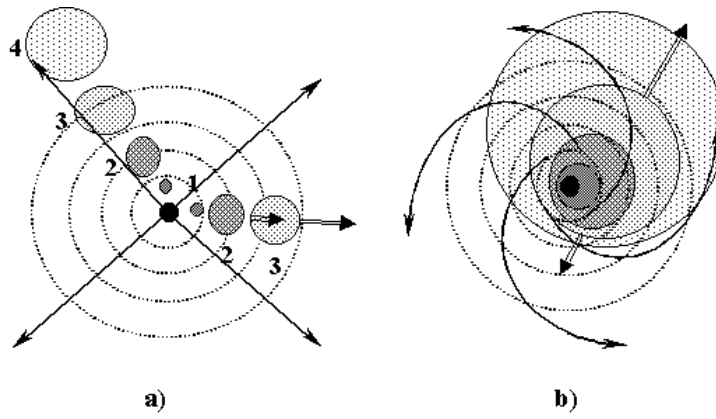


Рис. 5. Поведінка перетину в околі нестійкого фокуса і вузла

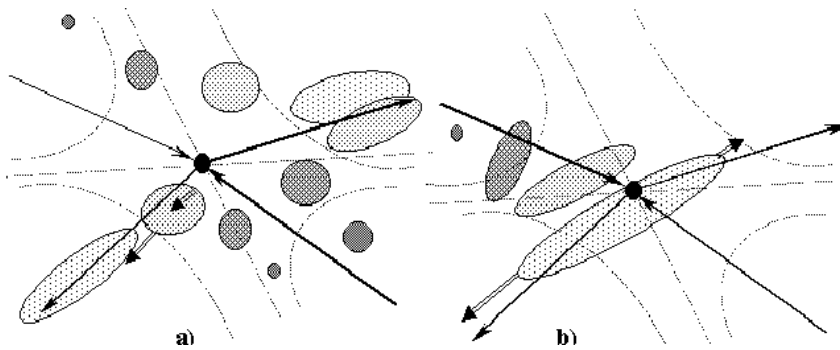


Рис. 6. Поведінка перетину в околі сідла

Кількісно наведені особливості описують рівняння дрейфу кумулянтів, які для системи другого порядку мають такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} dm_x / dt = -\langle F_x \rangle; \quad dm_y / dt = -\langle F_y \rangle; \\ \frac{dD_x}{dt} = -2 \left(\left\langle \frac{dF_x}{dx} \right\rangle D_x + \left\langle \frac{dF_x}{dy} \right\rangle \kappa \right) + b_{11}^2 N_1 + b_{12}^2 N_2; \\ \frac{dD_y}{dt} = -2 \left(\left\langle \frac{dF_y}{dy} \right\rangle D_y + \left\langle \frac{dF_y}{dx} \right\rangle \kappa \right) + b_{21}^2 N_1 + b_{22}^2 N_2; \\ \frac{d\kappa}{dt} = -\left\langle \frac{dF_y}{dx} \right\rangle D_x - \left\langle \frac{dF_x}{dy} \right\rangle D_y - \left(\left\langle \frac{dF_x}{dx} \right\rangle + \left\langle \frac{dF_y}{dy} \right\rangle \right) \kappa + \\ + b_{11} b_{21} N_1 + b_{12} b_{22} N_2, \end{array} \right. \quad (15)$$

де $D_x = \sigma_x^2$, $D_y = \sigma_y^2$ – дисперсії; $\kappa = \sigma_x \sigma_y$; b_{ij} – компоненти матриці B ; N_1, N_2 – енергії шумів n_1, n_2 .

Кординати центра перетину ($m_x; m_y$), характерні відхилення вздовж осей становлять

$$\Delta X = 2\sigma_x; \quad \Delta Y = 2\sigma_y. \quad (16)$$

Для лінійних систем усереднення в рівнянні (15) проводять по двовимірному нормальному розподілу, а самі рівняння є точними. Лінійність функцій $F_{x,y}(x,y)$ приводить до повного збігу перших двох рівнянь (15) з детермінованою частиною рівняння (12).

Розглянемо дію випадкової δ -корельованої напруги $n(t)$ на послідовне коливальне коло (рис. 7, а). Рівняння (12) набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

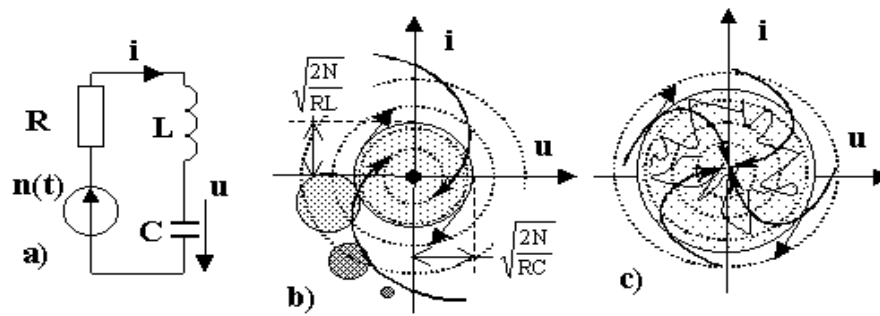


Рис. 7. Коливальне коло і його стохастичні фазові портрети

Єдина особлива точка на фазовій площині (i, u) з координатами $(0, 0)$ є стійким вузлом (рис. 7, с) за $R^2 > 4L/C$ або стійким фокусом (рис. 7, b) за $R^2 < 4L/C$. Рівняння (12) мають вигляд

$$\begin{cases} \dot{m}_i = -Rm_i / L - m_u / L; & \dot{m}_u = m_i / C \\ \dot{D}_i = -2(D_i + \kappa) / L + N / L^2; \\ \dot{D}_u = 2\kappa / C; \\ \dot{\kappa} = D_i / C - D_u / L - R\kappa / L. \end{cases} \quad (18)$$

Розв'язком рівняння (18) при нульових лівих частинах є усталені значення статистичних характеристик:

$$\begin{cases} m_i = 0; & m_u = 0; & \kappa = 0; \\ \sigma_i = \sqrt{D_i} = \sqrt{\frac{N}{2RL}}; & \sigma_u = \sqrt{D_u} = \sqrt{\frac{N}{2RC}}. \end{cases} \quad (19)$$

Підстановка рівняння (19) в (13) дає рівняння усталеного характерного перетину (еліпси на рис. 7, b і 7, с):

$$Li^2/2 + Cu^2/2 = N/R. \quad (20)$$

Як і в системах першого порядку для точок усталеного характерного перетину виконаний енергетичний баланс, оскільки ліва частина рівняння (20) є енергією реактивних елементів, а права – енергією навантаженого опором R джерела випадкової напруги. Рівняння (18) описують також процес встановлення стаціонарного характерного перетину від довільного початкового розподілу, що показано на рис. 7, b. Незалежно від значення R стаціонарний характерний перетин має ненульовий спін, що означає можливість обертових рухів в околі вузла. Типова коливальна реалізація в аперіодичному колі показана на рис. 7, с.

Часткові висновки:

1. Статистичну динаміку лінійної системи описує поведінка фігури (характерного перетину) на фазовій площині.
2. Центр перетину рухається по траєкторіях фазового портрета незбуреної системи.
3. В околі стійких особливих точок характерний перетин має стійке положення і стійкий розмір, який залежить від інтенсивності шуму.
4. Торкання перетином нестійкої особливої точки або кривої приводить до двостороннього необмеженого зростання розкиду, недоторкання – до одностороннього обмеженого зростання.
5. Рівняння дрейфу кумулянтів точно описують поведінку характерного перетину на фазовому портреті лінійної системи.

2. Біфуркації в нелінійних стохастичних системах

Нелінійність коефіцієнта зносу $F(x)$ в рівнянні (1) викликає негауссовість стаціонарного розподілу, обмеженість потенціальної функції та неєдиність станів рівноваги.

Для негауссівських розподілів *теорема 1* залишається справедливою, але співвідношення характерного і середньоквадратичного відхилень може сягати 30 % (табл. 2).

**Співвідношення характерного і середньоквадратичного відхилення
в нелінійних системах**

$F(x)$	ax	ax^3	$\text{sign } x$	$\begin{cases} 0 \text{ при } x < 1 \\ \text{sign } x \text{ при } x \geq 1 \end{cases}$
$k = \Delta x / \sigma$	2	2,046	1,41	1,569 .. 2,0

Для точнішої оцінки "σ" необхідно доповнити рівняння (9) і (15) рівняннями дрейфу вищих кумулянтів. Без такого доповнення вони описують тільки зміни розміру і положення розподілу, але не зміни форми.

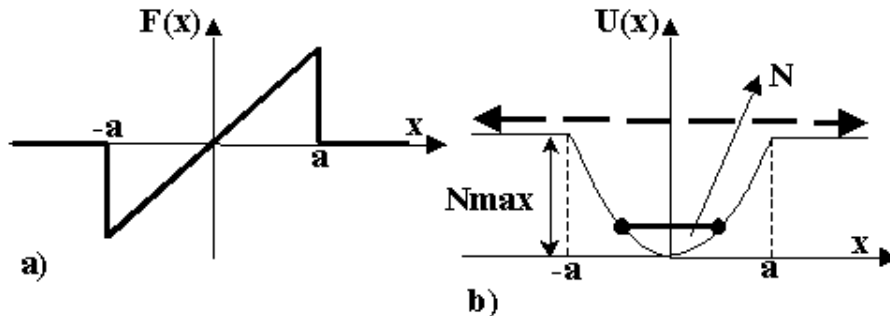


Рис. 8. Коефіцієнт зносу і обмежена потенціальна функція

Розглянемо динамічну систему з кусково-лінійною функцією $F(x)$ (рис. 8, а), що притаманно слідкуючим пристроям з обмеженою зоною чутливості. Потенціальна функція $U(x)$ є обмеженою (рис. 8, б) і це викликає нестаціонарність процесу $x(t)$, заданого рівнянням (1), та відсутність стаціонарного розв'язку $W(x)$ рівняння (2) при довільних N . Однак "стрижнева модель" і геометричні побудови на рис. 8, б показують, що значення $N_{\max} = U(a)$ (енергія збудження дорівнює глибині потенціальної ями) є біфуркаційним, – при менших шумах усталений характерний перетин існує, при більших – не існує. Кількісно це означає, що при $N < N_{\max}$ значення нестаціонарної густини розподілу за межами зони чутливості не перевищують 13,5 % максимального значення.

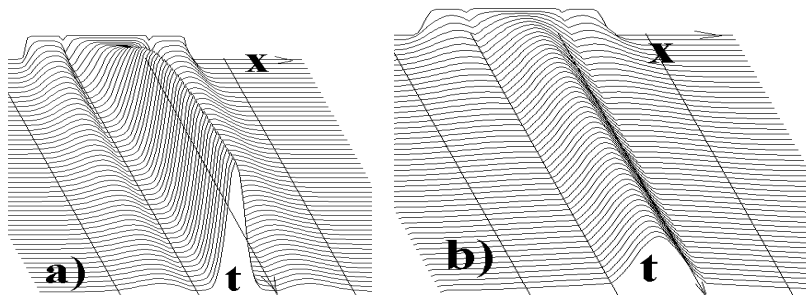


Рис. 9. Еволюція розподілу за $N < N_{\max}$ (а) та $N > N_{\max}$ (б)

Для з'ясування якісного змісту біфуркації були чисельно отримані нестаціонарні розв'язки рівняння (2) з рівномірним початковим розподілом в межах ± 1 , а. Аналіз результатів показав, що за $N < N_{\max}$ розподіли в зоні чутливості і поза нею формуються незалежно (рис. 9, а) і мають якісно різний характер, а за $N > N_{\max}$ межа зони чутливості впливає тільки на кількісні показники розподілу (рис. 9, б).

Реалізації процесу $x(t)$, отримані інтегруванням рівняння (1), показані на рис. 10. За докритичних рівнів шуму (суцільна лінія) процес є стаціонарним впродовж скінченних проміжків часу з дискретними викидами за зону чутливості. За рівнів шуму, більших від критичного (точки на рис. 10), проміжків стаціонарності не існує, зміна лінії тренду в зоні чутливості дещо повільніша, ніж поза нею, але на жодному скінченному проміжку часу тренд не є постійним.

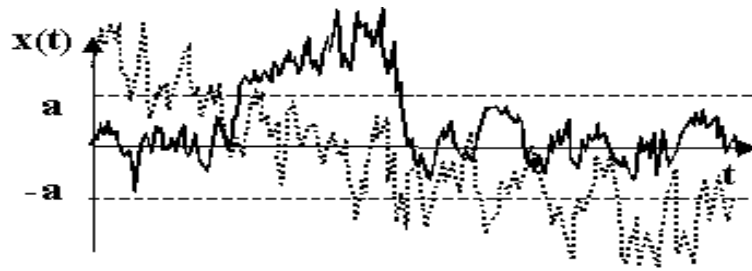


Рис. 10. Реалізації випадкового процесу

Отже, в системах з обмеженою потенціальною функцією існує гранична інтенсивність шуму, до досягнення якої процес в системі є стаціонарним впродовж скінченних проміжків часу. Визначити граничну інтенсивність шуму можна за ознакою існування стаціонарного характерного перетину або за глибиною потенціальної ями. Для докритичних рівнів шуму характерний перетин описує процес в межах зони чутливості і не описує викиди.

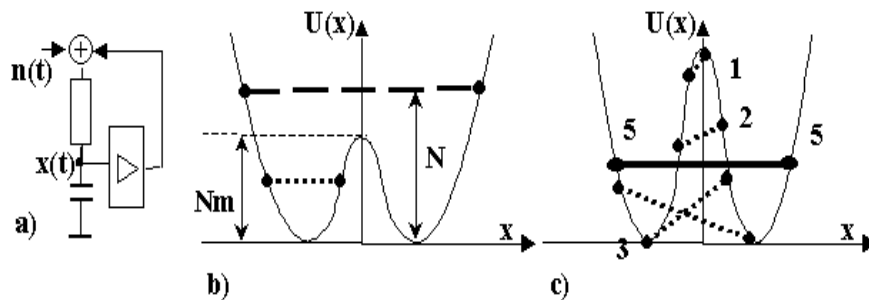


Рис. 11. Бістабільна система і її потенціальна функція

Приклад глобально стійкої в цілому динамічної системи першого порядку з двома стійкими і одним нестійким станами рівноваги показано на рис. 11, а. Математичною моделлю є стохастичне рівняння

$$dx/d\tau = f(x) - x + n(\tau), \quad (21)$$

де τ – нормований до сталої часу ФНЧ час; $f(x)$ – статична прохідна характеристика підсилювача.

Потенціальна функція наведена на рис. 11, б і "стрижнева" модель показують наявність біфуркаційного рівня шуму N_m , який дорівнює глибині потенціальної ями. За $N < N_m$ усталений характерний перетин охоплює тільки одну точку стійкої рівноваги, а за $N > N_m$ – обидві. Статистичний зміст біфуркації встановлено аналізом нестационарних розв'язків рівняння Фокера–Планка. За добіфуркаційних шумів спочатку встановлюється форма розподілу в околі одного стану рівноваги (рис. 12, а) і тільки потім внаслідок викидів з'являється друга мода розподілу. За $N > N_m$ друга мода з'являється до встановлення форми (рис. 12, б).

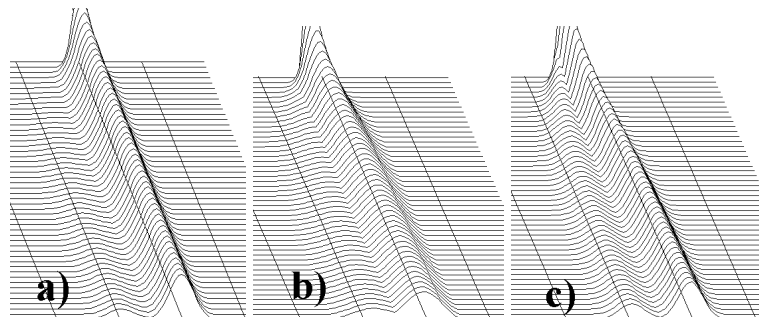


Рис. 12. Еволюція розподілу в бістабільній системі

Означення 3. Точка стійкої рівноваги є локально стійкою до шуму, якщо існують початкові розподіли, при яких час встановлення форми розподілу менший, ніж час виникнення моди в околі іншої точки рівноваги.

Означення 4. Граничним рівнем завад є рівень, за якого зникають локально стійкі до шуму точки.

"Стрижнева" модель і її кількісний опис рівняннями (9) показують наявність тільки однієї моди розподілу, оскільки вони нечутливі до викидів випадкового процесу і непридатні для аналізу інтенсивності перескоків, але придатні для визначення біфуркаційних значень параметрів. Безпосереднє моделювання реалізацій рівняння (21) показало, що за $N < N_m$ спостерігається розривно-стаціонарний випадковий процес, а за $N > N_m$ – істотно нестаціонарний (рис. 13). З точки зору функціональної надійності значення N_m не є біфуркаційним, оскільки вже перший викид означає збій в системі, але з точки зору фізичної надійності за $N < N_m$ пристрій продовжує роботу в ключовому режимі, а за $N > N_m$ тривалий час перебуває в активному режимі, розсіює більшу потужність і швидше виходить з ладу.

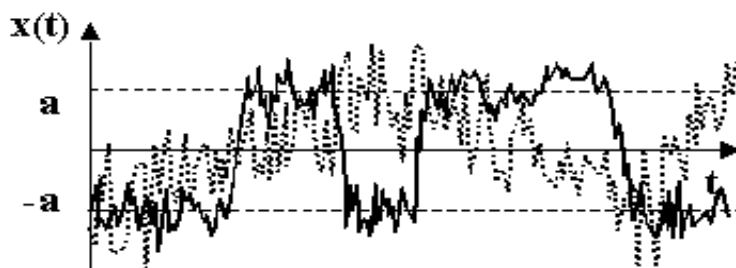


Рис. 13. Реалізації випадкового процесу в бістабільній системі

За вибором початкових умов поблизу точки нестійкої рівноваги можливе охоплення обох стійких станів навіть за добіфуркаційних рівнів шуму (рис. 11, с) і раннє виникнення другої моди (рис. 12, с). В системі з необмеженою потенціальною функцією ця залежність від початкового розподілу відображає не фізичні, а статистичні особливості – співвідношення імовірностей переходу в окіл одного зі станів рівноваги.

Означення 5. Область притягання стійкої до шуму точки – це область фазового простору, всі початкові точкові характерні перетини з якої приводять до усталеного перетину без торкання нестійких особливих точок або кривих.

За граничного рівня завад область притягання стискається до однієї точки, а за більшого стає порожньою множиною. Вибір точкового початкового перетину (або δ -подібного початкового розподілу) зумовлений тим, що реалізація має фіксоване значення в початковий момент часу. Зокрема, при визначенні локальної стійкості до шуму необхідно обирати точкові початкові умови в стійкій точці.

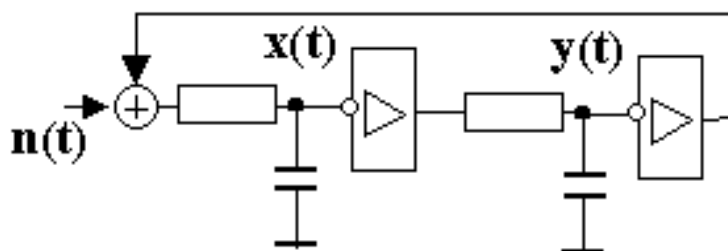


Рис. 14. Бістабільна динамічна система другого порядку

На рис. 14 показана бістабільна динамічна система другого порядку, а на рис. 15 – її фазовий портрет, який містить два стійкі вузли і сідло. Еквіпотенціальні лінії позначені пунктиром, границі областей притягання – штриховими лініями. Перетин потенціального рельєфу вздовж вихідних сепаратрис збігається з потенціальною функцією на рис. 11, b і особливості процесів в системах першого і другого порядків є однакові. За відсутності завади границі областей притягання зливаються з вхідними сепаратрисами, а за $N > N_m$ – зникають поблизу стійких вузлів. Поведінка характерних перетинів (еліпсів) відображає статистичну динаміку системи, яка за $N < N_m$ полягає у наближенні до стаціонарного перетину в околі однієї стійкої точки (серії 1, 2 і 3 на рис. 15) або в околі обох стійких точок (серія 4). За $N > N_m$ області притягання порожні, усталений перетин внаслідок глобальної стійкості системи існує і охоплює обидві точки стійкої рівноваги.

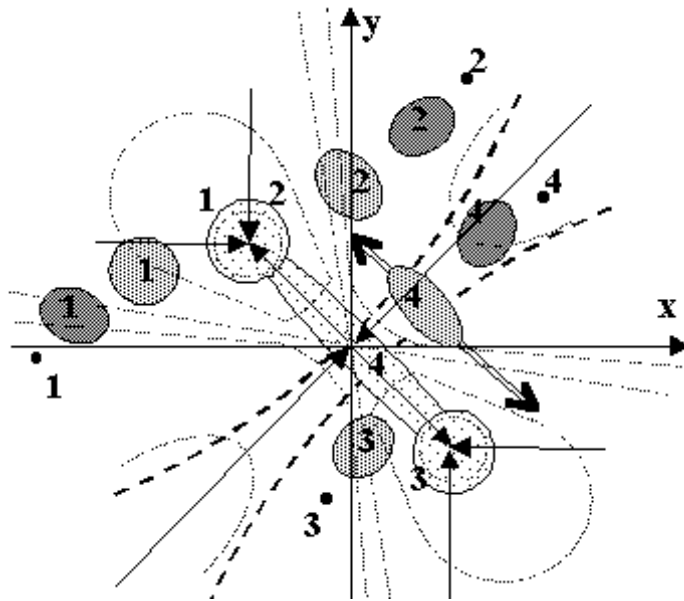


Рис. 15. Фазовий портрет бістабільної системи другого порядку

За обмеженої потенціальної функції $U(x)$ область притягання набуває не тільки статистичного, а й фізичного змісту. Розглянемо потенціальний рельєф типу "гірське озеро" (рис. 16, а), фазовий портрет якого (рис. 16, б, с і d) містить стійкий вузол і сідло з близькими вхідними сепаратрисами. Нехай потенціал стійкого вузла достатньо низький для існування усталеного характерного перетину. За достатньої глибини потенціальної западини між сепаратрисами (або за достатньо малої енергії збудження) область притягання є необмеженою (рис. 16, б), тобто знайдеться як завгодно віддалений від стійкої точки початковий перетин, який приводить до стаціонарного. За більшої інтенсивності шуму (або мілкішої западини) область притягання стає обмеженою. Близькі початкові перетини приводять до усталеного (рис. 16, с), а далекі в ході еволюції торкаються вхідних сепаратрис, їх розмір стає нестійкий і необмежено зростає (рис. 16, d). Випадки на рис. 16, б і с означають, що тільки випадкові викиди порушують стаціонарність процесу в околі стійкої рівноваги. У разі рис. 16, d процес може прийти до стаціонарного тільки завдяки випадковим викидам.

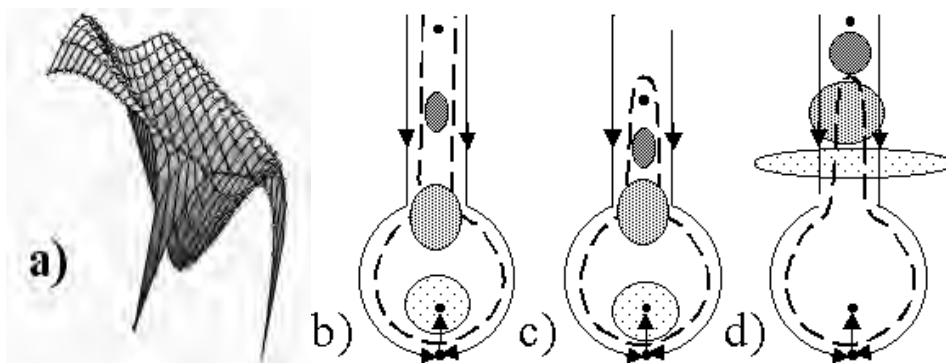


Рис. 16. Фазовий портрет з обмеженою областю притягання

Часткові висновки:

1. Існування усталеного характерного перетину в околі однієї точки рівноваги означає можливість розривно-стаціонарного процесу в системі і швидше порівняно з часом до перескоку встановлення форми розподілу.

2. Область притягання усталеного характерного перетину визначає початкові умови, які забезпечують розривно-стаціонарний процес в системі.

3. Метод характерних перетинів при кількісному описанні рівняннями дрейфу кумулянтів придатний для знаходження біфуркаційних параметрів шуму і динамічної системи.

3. Застосування до аналізу пристроїв синхронізації

Пристрій фазового автопідстроювання частоти (ФАПЧ) – один з типових пристроїв синхронізації – зображений на рис. 17, а і містить перемножувач, керований генератор КГ і фільтр нижніх частот з операторною функцією $K(p)$. Оскільки при описанні пристроїв синхронізації фазовою змінною є повна різниця фаз, то особливістю їх математичних моделей є періодичність і обмеженість коефіцієнтів зносу. За умови $K(p)=1$ математичною моделлю безфільтрової ФАПЧ є стохастичне рівняння

$$dx/d\tau = \gamma - \sin x + \sqrt{N}n_0(t), \quad (22)$$

де τ – добуток часу і смуги утримання; x – повна різниця фаз КГ і сигналу; γ – нормоване початкове розузгодження частот КГ і сигналу; N – відношення потужностей шуму і сигналу в смузі утримання; n_0 – δ -корельований випадковий процес з одиничним енергетичним спектром.

Потенціальна функція, яка відповідає рівнянню (22)

$$U(x) = -\gamma x - \cos x + U_0, \quad (23)$$

зображена на рис. 17, б, є обмеженою з одного боку і за $\gamma < 1$ має періодично повторювані мінімуми і максимуми:

$$\begin{aligned} x_{\min} &= 2k\pi + \arcsin \gamma; \\ x_{\max} &= (2k+1)\pi - \arcsin \gamma. \end{aligned} \quad (24)$$

Згідно з викладеною методикою усталений характерний перетин розподілу змінної "x" має задовольняти умові

$$U(x_{\min} + 2\sigma) - U(x_{\min}) = N. \quad (25)$$

Виконання умови (25) означає можливість синхронного режиму і, як видно з рис. 17, б, можливе за глибини потенціальної ями, більшої від енергії шуму. Оскільки параметри рівняння (22) поділяються на незалежні від пристрою (N) та залежні (γ), доцільно запровадити такі означення.

Означення 6. Гранична завадостійкість пристрою синхронізації – максимальна інтенсивність шуму, для якої існує стаціонарний характерний перетин розподілу різниці фаз.

Означення 7. Шумова смуга утримання (ШСУ) – область простору параметрів, для якої існує стаціонарний характерний перетин розподілу різниці фаз.

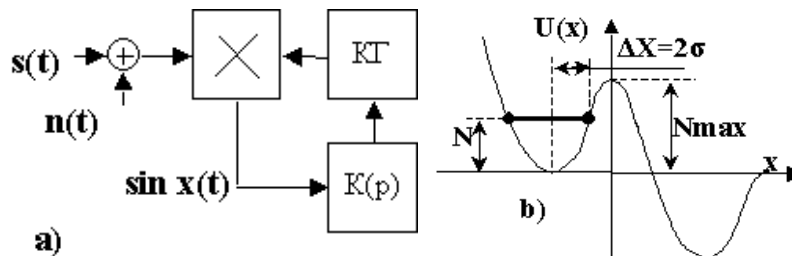


Рис. 17. ФАПЧ та її потенціальна функція

З геометричної побудови на рис. 17, б та (22), (23) і (25) впливають вирази для граничної завадостійкості N_{\max} , енергії $N(2\sigma)$ та розкиду 2σ усталеного характерного перетину розподілу різниці фаз:

$$N_{\max} = \gamma(2 \arcsin \gamma - \pi) + 2\sqrt{1 - \gamma^2}; \quad (26)$$

$$N(2\sigma) = -\gamma(2\sigma - \sin 2\sigma) + \sqrt{1 - \gamma^2} (1 - \cos 2\sigma). \quad (27)$$

Залежність (26) зображена на рис. 18, а із позначеними ШСУ та N_{\max} показує граничні можливості застосування безфільтрової ФАПЧ, а залежність (27) на рис. 18, б дає змогу оцінити якість синхронізації. Для порівняння на рис. 18, а наведені граничні значення початкового розузгодження, отримані кумулянтним аналізом в [4], експериментальні дані з [5] та результати дослідження багатомодового розподілу різниці фаз з [6]. Найбільша розбіжність оцінок граничних параметрів (до 30 %) спостерігається в області малих початкових розузгоджень.

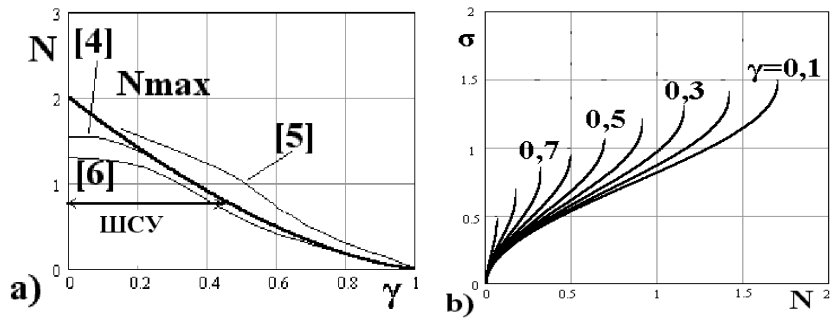


Рис. 18. Граничні параметри і похибка безфільтрової ФАПЧ

Належність параметрів пристрою до ШСУ означає:

- існує стаціонарний характерний перетин (рис. 19, b);
- другий максимум розподілу повної різниці фаз може виникнути тільки після встановлення розподілу в околі одного стану рівноваги;
- типові реалізації процесу $x(t)$ є стаціонарними флуктуаціями навколо стану рівноваги з дискретними проковзуваннями циклів (рис. 19, c) [7].

В межах ШСУ безфільтрової ФАПЧ усталений характерний перетин встановлюється при довільних початкових умовах з нульовою дисперсією (рис. 19, b). Вихід за межі ШСУ означає зникнення стійкості характерного перетину (рис. 19, b і e) та зникнення квазістаціонарних флуктуацій (рис. 19, c і f). В той самий час, точний аналіз розподілу за періодичних граничних умов [8] не показує якісних змін статистичної динаміки (рис. 19, a, d) – стаціонарний розподіл Тихонова продовжує існувати і змінюється тільки кількісно, хоча поза ШСУ цей розподіл утворюють переважно обертові реалізації.

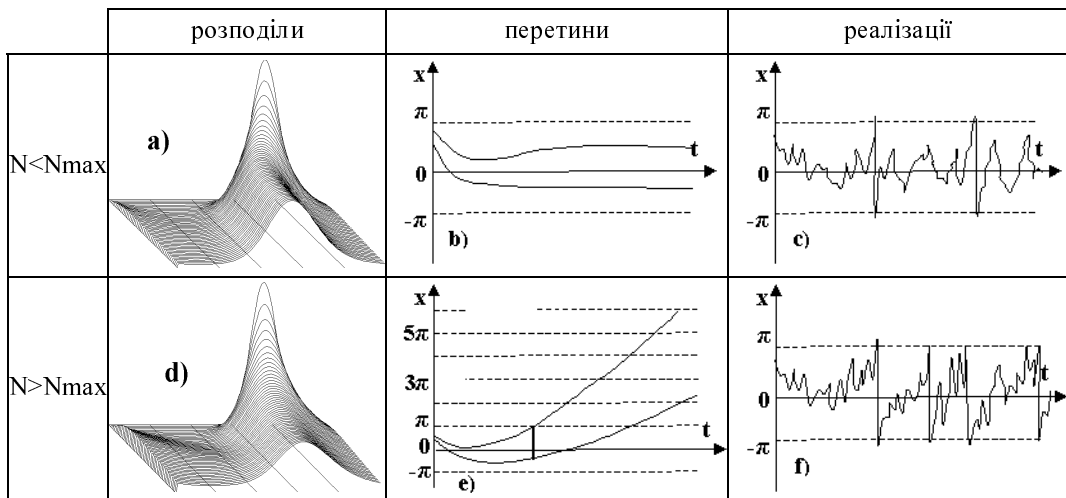


Рис. 19. Шумова біфуркація в безфільтровій ФАПЧ

Математичною моделлю ФАПЧ (рис.17, а) з інтегруючим ФНЧ ($K(p)=\alpha/(a+pt)$) за дії на вхід суміші сигналу, шуму і гармонічної завади є система неавтономних стохастичних рівнянь другого порядку [9]:

$$\begin{cases} dx/d\tau = y/\beta \\ dy/d\tau = \gamma - y - \sin x - \mu \sin(x + \gamma_1\tau) + \sqrt{N}n_0(\tau), \end{cases} \quad (28)$$

де τ – нормований до сталої часу ФНЧ час; β – відношення смуги ФНЧ до смуги утримання; γ_1 – нормована до смуги ФНЧ різниця частот сигналу і завади; μ – відношення амплітуд завади і сигналу; y – нормована до смуги утримання частотна похибка синхронізації; N – відношення шум-сигнал в смузі ФНЧ, решта позначень, як в (22).

За відсутності завади і шуму ($\mu = 0, N = 0$) математична модель (28) детально досліджена в [10] та [11]. Фазовий портрет системи є періодичним по осі "x" і за малих γ містить на кожному періоді сідло і глобально стійкий фокус (рис. 20, a). З ростом γ сепаратиси сусідніх сідел замикаються в петлю з утворенням стійкого граничного циклу (рис. 20, b) – утримання синхронізму можливе, але схоплення залежить від початкових умов. Подальше збільшення γ приводить до злиття і зникнення сідла і фокуса (рис. 20, c) – синхронізм стає неможливим.

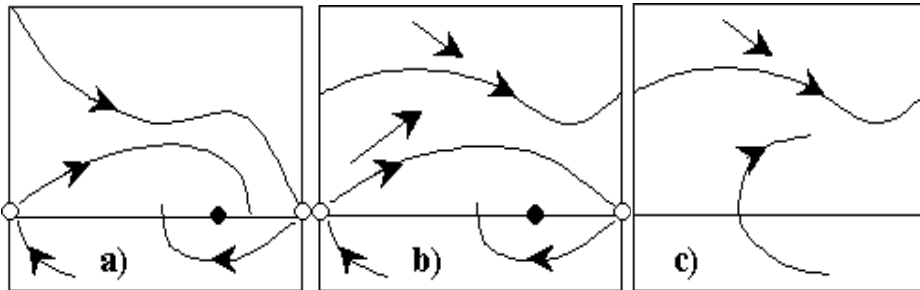


Рис. 20. Біфуркації в ФАПЧ другого порядку без завад

Для виявлення впливу шуму на процеси в ФАПЧ розглянемо варіанти поведінки характерного перетину на фазовому портреті системи (рис. 21). Характерний перетин двовимірного розподілу є плоскою фігурою, для гауссівського розподілу – еліпсом. На рис. 21 зображені також типові реалізації двовимірного процесу (x, y).

Стационарний характерний перетин (на рис. 21 заштрихований) може існувати тільки в околі стійкого фокуса. За збільшення розміру перетину з ростом N , а також через зміну розташування нестійких особливих ліній з ростом γ чи зменшенням β , перетин торкнеться вхідних сепаратрис і його розмір стане нестійким. Значення параметрів, які призводять до торкання, визначають граничну завадостійкість і ШСУ пристрою.

Розглянемо процес встановлення стаціонарного перетину від δ -подібного початкового розподілу. Тип перехідного процесу визначає співвідношення швидкостей встановлення розміру і положення характерного перетину. Якщо розмір наростає повільно, а положення встановлюється швидко, то характерний перетин не встигає торкнутися вхідних сепаратрис і через деякий час встановлюється усталений перетин (середня серія на рис. 21).

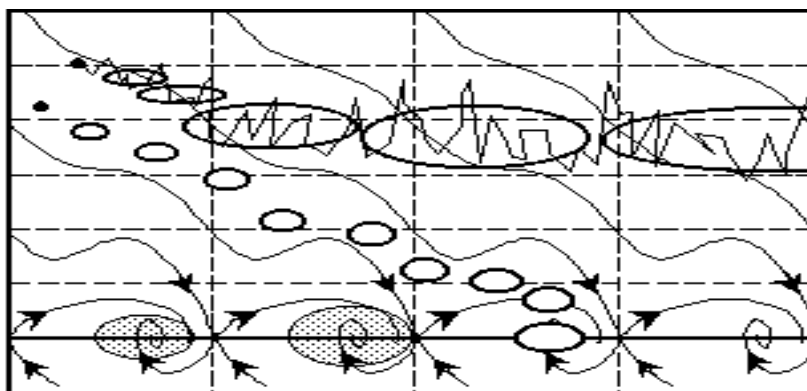


Рис. 21. Стохастичні біфуркації в ФАПЧ другого порядку

Якщо розмір наростає швидко або відстань між сепаратрисами мала, то характерний перетин перекриває сепаратриса, його розмір стає нестійким, а сам перетин ковзає вздовж осі "x" без наближення до стану рівноваги (верхня серія на рис. 21). Через велику інтенсивність шуму типові реалізації вільно перетинають нестійкі особливі лінії. Поява таких реалізацій на глобально стійкому фазовому портреті аналогічна до появи описаних в розділі II коливальних рухів в аперіодичному колі.

Означення 8. Шумова смуга захоплення (ШСС) – область простору параметрів, для якої область притягання стійкого характерного перетину необмежена.

ШСС завжди менша від смуги захоплення автономної системи. За практичного визначення ШСС слід обирати δ -подібні початкові умови за межами ε -околу вхідних сепаратрис, а через обмежену смугу перенастроювання КГ необхідно обмежити значення змінної "у" умовою $\gamma - 1 < u < \gamma + 1$.

Для кількісного аналізу описаних явищ використані рівняння еволюції характерного перетину гауссівського модельного розподілу, отримані в [9] і [12] кумулянтним методом:

$$\begin{cases} \frac{dm_x}{d\tau} = \frac{m_y}{\beta}; & \frac{dD_x}{d\tau} = \frac{2}{\beta}k; \\ \frac{dm_y}{d\tau} = \gamma - m_y - E(\sin m_x + \mu \sin(m_x - \frac{\gamma_1 \tau}{\beta})); \\ \frac{dD_y}{d\tau} = -2D_y - 2Ek(\cos m_x + \mu \cos(m_x - \frac{\gamma_1 \tau}{\beta})) + N; \\ \frac{dk}{d\tau} = \frac{D_y}{\beta} - k - D_x E(\cos m_x + \mu \cos(m_x - \frac{\gamma_1 \tau}{\beta})). \end{cases} \quad (29)$$

Тут m_x , m_y , D_x , D_y – середні значення і дисперсії фазової і частотної похибок, відповідно. Кумулянт 2-го порядку k характеризує кореляцію фази і частоти, $E = \exp(-D_x/2)$.

За відсутності завади ($\mu = 0$) отримано залежність ШСС $\gamma = f(N, \beta)$, перетини якої площинами $N = \text{const}$ та $\beta = \text{const}$ показані на рис. 22 і 23, відповідно. ШСУ позначена на рис. 22 горизонтальними лініями, а на рис. 23 збігається з ШСС за великих β (верхня крива). ШСС за відсутності шуму ($N = 0$) показана верхньою кривою на рис. 22 і аналогічна до відомої з [10] і [11] кривої Трикомі.

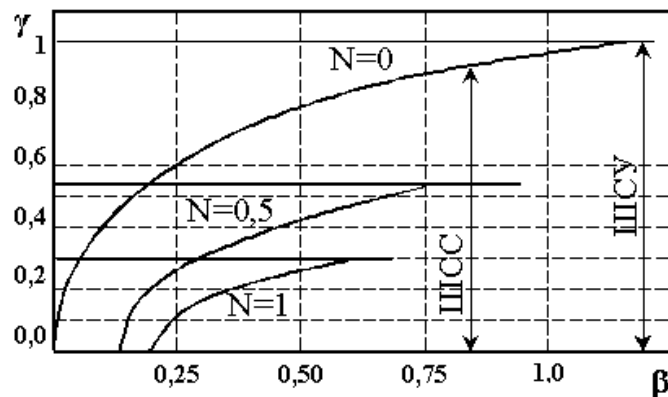


Рис. 22. Залежність ШСУ та ШСС від інерційності ФАПЧ

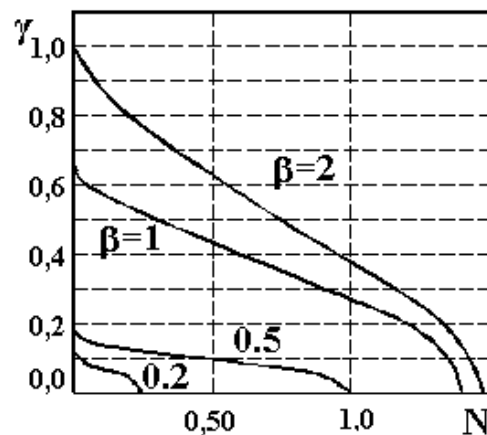


Рис. 23. Залежність ШСУ і ШСС від інтенсивності шуму

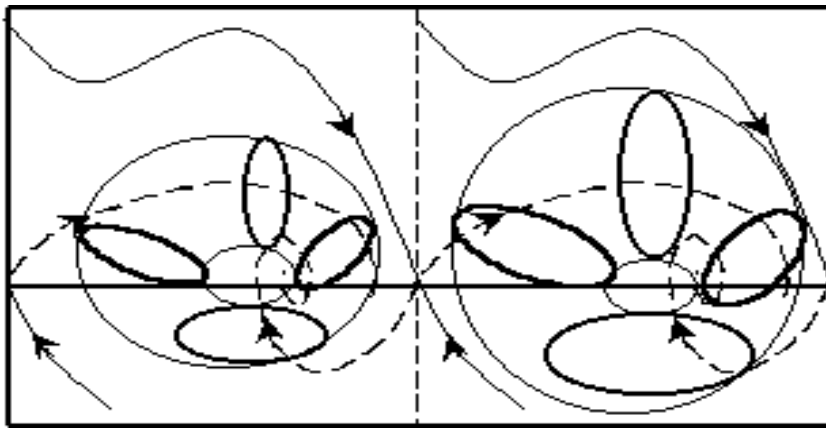


Рис. 24. Періодичні рухи, викликані гармонічною завадою

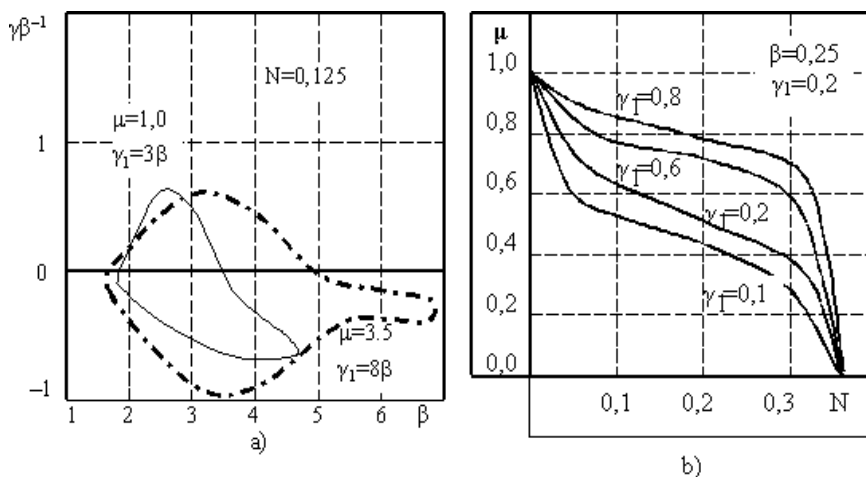


Рис. 25. ШСУ і гранична завадостійкість при дії двох завад

Зміна ШСУ при зміні параметра β показана на рис. 25, а, а гранична завадостійкість при одночасній дії шуму і завади – на рис. 25, б.

За наявності шуму ($N > 0$) і гармонічної завади ($\mu > 0$) замість усталеного характерного перетину виникають його періодичні рухи (рис. 24). Аналіз рівнянь (29) показав, що за певних параметрів пристрою і завад ці рухи є стійкими щодо малих збурень. Наявність таких рухів означає синхронізм в середньому КГ і сигналу. Торкання характерним перетином вхідної сепаратриси (чи через збільшення розміру перетину, чи через ріст амплітуди періодичного руху) призводить до зриву синхронізму, тобто означає вихід з ШСУ.

Висновки

Запропоновано описувати випадкові процеси в динамічних системах поведінкою характерного перетину на фазовій площині і встановлено основні закономірності такої поведінки для лінійних і нелінійних систем. Такий підхід дав змогу визначити граничну завадостійкість синхронізації, смуги утримання і захоплення ФАПЧ при дії шумів. Подальше використання описаного підходу дасть можливість обирати параметри пристроїв синхронізації, оптимальні з точки зору завадостійкості, а також визначати гранично допустимі рівні завад за комбінованого впливу завад різних типів.

1. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. – М., 1956. 2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М., 1982. 3. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М., 1978. 4. Шалфеев В.Д. Использование

кумулянтного аналізу для дослідження СФС. Системи фазової синхронізації. – М., 1982. 5. Бондарев А.П. Экспериментальная проверка некоторых результатов кумулянтного анализа СФС. – Львов, 1986. Рук. деп в УкрНИИИТИ, №1130-Ук86, 1986. 6. Мандзий Б.А., Бондарев А.П. Качественный анализ статистической динамики системы ФАПЧ / Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника. – 1988. – № 12. – С.74–76. 7. Бондарев А.П., Капшій О.В. Критерій граничної завадостійкості системи фазової синхронізації / Вісник ДУ"ЛП" Радіоелектроніка та телекомунікації. – 1998. – № 352. – С. 98–100. 8. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М., 1977. 9. Бондарев А.П. О кумулянтном анализе системы ФАПЧ при воздействии гармонической помехи / Теоретическая электротехника. – 1985. – Вып. 39. – С.79–84. 10. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М., 1981. 11. Белюстина Л.Н., Кивелева К.Г., Фрайман Л.А. Качественно-численный метод в исследовании трехмерных нелинейных СФС. Системи фазової синхронізації – М., 1982. 12. Бондарев А.П., Мандзий Б.А. Аналіз граничної завадостійкості системи фазової синхронізації / Теоретична електротехніка. –1998. – Вып. 54. – С.14–17.

УДК 658.562

Леонід Недоступ, Мирослав Кіселичник,
Юрій Бобало, Григорій Васьків*, Оксана Лазько

Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра теоретичної радіотехніки та радіовимірювань,

* кафедра електронних засобів інформаційно-комп'ютерних технологій

СТРУКТУРУВАННЯ, ОЦІНЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЯКОСТІ РАДІОЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЇВ

© Недоступ Леонід, Лазько Оксана, Кіселичник Мирослав, Бобало Юрій, Васьків Григорій, 2004

Розглянуто підходи до побудови наскрізних математичних моделей виробничих систем забезпечення якості радіоелектронних пристроїв. Запропоновано універсальні імовірності, функціональні та економічні критерії оцінки ефективності цих систем.

The approaches to the transparent mathematical models of radio electronic devices quality providing technological systems design are considered. The universal probability functional and economical criteria of such systems efficacy are proposed.

Вирішити проблему створення вітчизняної конкурентоспроможної продукції можна тільки шляхом впровадження у виробництво перспективних розробок і використання наукомістких технологій, включно з ефективними системами забезпечення якості. Структурно ці системи являють собою комплекси технологічних, метрологічних, виробничих та інших технічних засобів, призначених для проведення відповідних процедур з метою забезпечення необхідних властивостей виробів і збереження цих властивостей в процесі експлуатації. Це досягається забезпеченням кондиційності матеріалів, напівфабрикатів і комплектуючих виробів, точністю виконання технологічних операцій, виявленням та усуненням виробничих дефектів і причин їх виникнення. По суті такі системи є системами забезпечення безвідмовності виробів на всіх стадіях виробництва. Важливим у їх формуванні є не тільки технічні, а й організаційно-інформаційні системи, які у сукупності визначають множину часткових завдань загальної проблеми багатокритеріальної оптимізації повних технологічних процесів виготовлення РЕП. Дослідження показують, що загальної методології наскрізного моделювання процесів виробництва в плані забезпечення якості виробів і оптимізації цих процесів на сьогодні ще не створено, хоча роботи в цьому напрямку інтенсивно ведуться [1–4]. Це і обумовлює актуальність проведення подальших досліджень у цій сфері.