

слабко проникних включень не завжди вдається отримати хороші результати, використовуючи скінченні ряди поліномів Лежандра для представлення функції напору для пакету шарів загалом. Наявність сильно або слабо проникних шарів у пористих середовищах значно (якісно і кількісно) впливає на розподіл фільтраційних параметрів як за товщиною середовища, так і на поверхні.

1. Дубовик А.В., Копитко М.Ф. Розв'язування задачі фільтрації в циліндричній області з горизонтальною свердловиною МСЕ // Волинск. математ. вісник. –1998.– Вип. 5.– С. 56-60. 2. Копитко М.Ф., Савула Я.Г. Алгоритмічний підхід до дослідження задач пружного деформування оболонок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. –Вип. 46.– С. 10-16. 3. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991. 4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод.– М., 1977. 5. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М., 1969. 6. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.,1977. 7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М., 1981.

УДК 681.32.03

М.М. Климаш, І.М. Дронюк, М.І. Олексін  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра телекомунікацій

## МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНОК ОПТИМАЛЬНИХ ШЛЯХІВ З'ЄДНАННЯ У ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖАХ

© Климаш М.М., Дронюк І.М., Олексін М.І., 2006

**Побудована модель цифрових магістральних мереж ВАТ “Укртелеком” у вигляді простого планарного графа. Характеризуються властивості запропонованого графа. Запропоновано модифікацію алгоритму Дейкстри для знаходження мінімального часу проходження з'єднання у телекомунікаційній мережі.**

**The model of network VAT “Ukrtelecom” as simple planar graph is presented. Properties of the graph are considered. The modified Dijkstra’s algorithm for optimal path is proposed for minimal time connection in telecommunication network.**

### Вступ

Сучасний стан розвитку суспільства тісно пов'язаний з поняттям “мережа”. Нас оточують мережі магазинів, мережі автодоріг, залізничного та авіатранспорту, комп'ютерні мережі та багато інших мереж. Серед них за важливістю одне з перших місць займають мережі засобів зв'язку. Транспортні мережі електрозв'язку широко застосовуються у сучасній техніці, а також у щоденному житті людини. Особливістю таких мереж є перенесення інформаційних потоків електронними засобами [1]. Імітаційне моделювання широко використовують для дослідження мереж різних класів, оскільки воно дає змогу оцінити ефективність роботи та визначити напрями удосконалення мережі.

### Постановка задачі

Для передавання інформації з одного місця до іншого застосовують транспортні мережі електрозв'язку. В основу поняття “транспортна мережа” покладено функціональний принцип [1]. Воно відповідає прийнятому у зв'язківців терміну “первинна мережа”. Основна функція первинної мережі полягає у передаванні – транспортуванні інформації між пунктами. Це може бути інформація телефонних абонентів, користувачів Інтернету, програм телебачення, контролю і технічного обслуговування мережі, сигнали взаємодії між комутаційними станціями, інформація обліку вартості послуг – тарифікації тощо [1].

Відомо, що багато класів задач, що стосуються транспортних мереж, можна розглядати як задачі на графах [2]. Проте для ефективного імітаційного моделювання телекомунікаційних мереж

(ТКМ) необхідно врахувати особливості їхньої структури та функціонування. Метою статті є розроблення математичної моделі на основі теорії графів для ТКМ з урахуванням особливостей їхнього функціонування, а також створення комп'ютерної імітаційної програми на цій базі та побудова відповідних оптимізаційних алгоритмів для розрахунків оптимальних параметрів функціонування телекомунікаційних мереж.

Одним із способів підвищення ефективності навантаження телекомунікаційних мереж (ТКМ) є розрахунок оптимальних шляхів проходження пакета по мережі від місця формування до місця призначення. Отже, поставлена задача може бути розв'язана за допомогою моделювання ТКМ за допомогою теорії графів з урахуванням таких особливостей, як багаторівневність та затримка у вузлах. Моделювання транспортних мереж за допомогою графів описано в роботах [2,3]. В запропонованій роботі розглядається застосування теорії графів стосовно оптимізаційних задач для ТКМ України і ТКМ м.Львова ВАТ “Укртелеком” та обґрунтовується доцільність такого вибору.

### Побудова імітаційної моделі

Дослідження описані у цій статті зроблені на підставі цифрових магістральних мереж ВАТ “Укртелеком”. Побудований граф для ТКМ України, що з'єднують обласні центри, наведений на рис.1. Як прийнято [4], під графом будемо розуміти певну множину вузлів і певну множину ребер, що з'єднують пари різних вузлів (одне ребро може з'єднувати не більше від однієї пари вузлів). Для можливості застосування відповідних алгоритмів будемо розглядати простий граф [4], а саме граф, що не містить петель (ребер, що з'єднують вузол сам з собою) та паралельних ребер. Отже, надалі під терміном “граф” розуміємо простий граф. У разі існування двох ліній комунікації, що з'єднують відповідні вузли, приймаємо одну лінію з сумарною пропускною здатністю. Наприклад, цифрова магістральна мережа “Південь” Київ-Черкаси-Кіровоград-Одеса-ІTUR має паралельно дві лінії. Перша – з пропускною здатністю 622 Мбіт/с, введена в експлуатацію у 1996 році і друга – пропускною здатністю 2,5 Гбіт/с, введена в експлуатацію у 2002 році. Будуючи граф, вважаємо, що вузли Київ-Черкаси-Кіровоград-Одеса з'єднують одинарні (не паралельні!) ребра з сумарною пропускною здатністю 3,122 Гбіт/с.



Рис. 1. Граф цифрової магістральної мережі для обласних центрів України

Авторами побудовано граф, що моделює цифрові магістральні мережі (ЦММ) ВАТ “Укртелеком” і є основою досліджень (рис. 1). Вузлами графа є відповідні міста України, а ребра – відповідні ланки зв’язку цифрової магістральної мережі ВАТ “Укртелеком”.

Ребра графа будемо характеризувати пропускну здатністю каналів зв’язку ЦММ ВАТ “Укртелеком” та віддаллю між містами. З кожним вузлом асоційований набір трьох чисел, що характеризує затримку сигналу у вузлі за різних режимів навантаження мережі. Можливість надходження та передавання інформації через ЦММ ВАТ “Укртелеком” іноземними операторами моделюється на графі наявністю спеціальних вузлів, що можуть бути джерелами та стоками. Ці властивості графа є особливо важливими для розрахунків використання ЦММ ВАТ “Укртелеком” як проміжної ланки для передавання транснаціональних даних, наприклад, з Західної Європи в Росію. Як видно з рис. 1 джерелами та стоками можуть бути Ужгород (Словаччина, Угорщина, Румунія), Рахів (Угорщина), Львів (Польща), Ковель (Польща, Білорусія), Чернівці (Румунія, Молдова), Одеса (Молдова, ITUR, BSFOCS), Луганськ (Росія), Харків (Росія) та Чернігів (Білорусь).

За аналогічними принципами будемо граф цифрової магістральної мережі ВАТ “Укртелеком” м. Львова (рис.2).

### **Властивості графів цифрових магістральних мереж ВАТ “Укртелеком”**

Опишемо деякі властивості отриманих графів.

Основними характеристиками кожного графа є кількість його вузлів  $N$  та кількість його ребер  $E$ . Як видно (рис. 1), граф складається з 25 вузлів ( $N=25$ ) та 44 ребер ( $E=44$ ). Доведено [4], що граф, який складається з  $N$  вузлів, містить не більше ніж  $N(N-1)/2$  ребер. У нашому випадку граф ТКМ України може містити не більш ніж 300 ребер, а реально містить 44 ребра. Це свідчить про те, що досліджуваний граф є розрідженим графом. У протилежному випадку граф називається насиченим і кількість ребер насиченого графа повинна бути пропорційною до  $N^2$  [4]. Ця характеристика графа є надзвичайно важливою для вибору алгоритмів обробки, адже відомо, що деякі алгоритми значно швидше збігаються на розріджених графах [5,6].

Як видно (рис. 2), граф ТКМ м.Львова складається з 17 вузлів ( $N=17$ ) та 19 ребер ( $E=19$ ). У нашому випадку граф ТКМ м.Львова ВАТ “Укртелеком” може містити не більш ніж 152 ребер, а реально містить 19 ребер. Це свідчить про те, що цей граф також є розрідженим графом.

Досліджувані графи є так званими планарними графами [4], тобто уможливають графічне зображення без перетину ребер, а також можуть бути евклідовими графами, якщо за основну характеристику ребра брати не пропускну здатність мережі, а реальну віддаль між містами. Відзначимо, що наявність планарності та евклідовості дають змогу елегантно представити цей граф, проте не мають принципового значення для реалізації алгоритмів розв’язання поставлених задач.

Залежно від застосування цього графа до розв’язання конкретних задач будемо вважати його орієнтованим або неорієнтованим. Наголосимо, що задачі моделювання телекомунікаційних мереж природно описуються орієнтованими графами. У межах цієї статті будемо розглядати граф як неорієнтований. Це означає, що наявність комунікації між містами (або ребра між вузлами графа) є двосторонньою, причому пропускну здатність ребра однакова в обидва боки. Крім того, з кожним ребром асоційована пропускну здатність комунікації та відстань між містами. Загалом число, пов’язане з ребром, називається вагою ребра, а відповідні графи – зваженими графами. Зважені орієнтовані графи називають в літературі мережами [2, 3].

### **Альтернативний спосіб представлення графа**

Метою цього дослідження є комп’ютерне моделювання транспортних потоків в ЦММ ВАТ “Укртелеком” в режимі реального часу. Тому графічне подання мережі не відповідає поставленій задачі. В літературі відомі альтернативні способи подання графів: у вигляді матриці суміжностей та у вигляді списку суміжних вузлів [4]. Подання у вигляді списку суміжних вузлів має переваги при розгляді розрідженого графа, а також при реалізації алгоритмів знаходження шляхів між вузлами [6].

Реалізація графа ЦММ м. Львова ВАТ “Укртелеком” у вигляді списку суміжних вузлів наведена в таблиці.

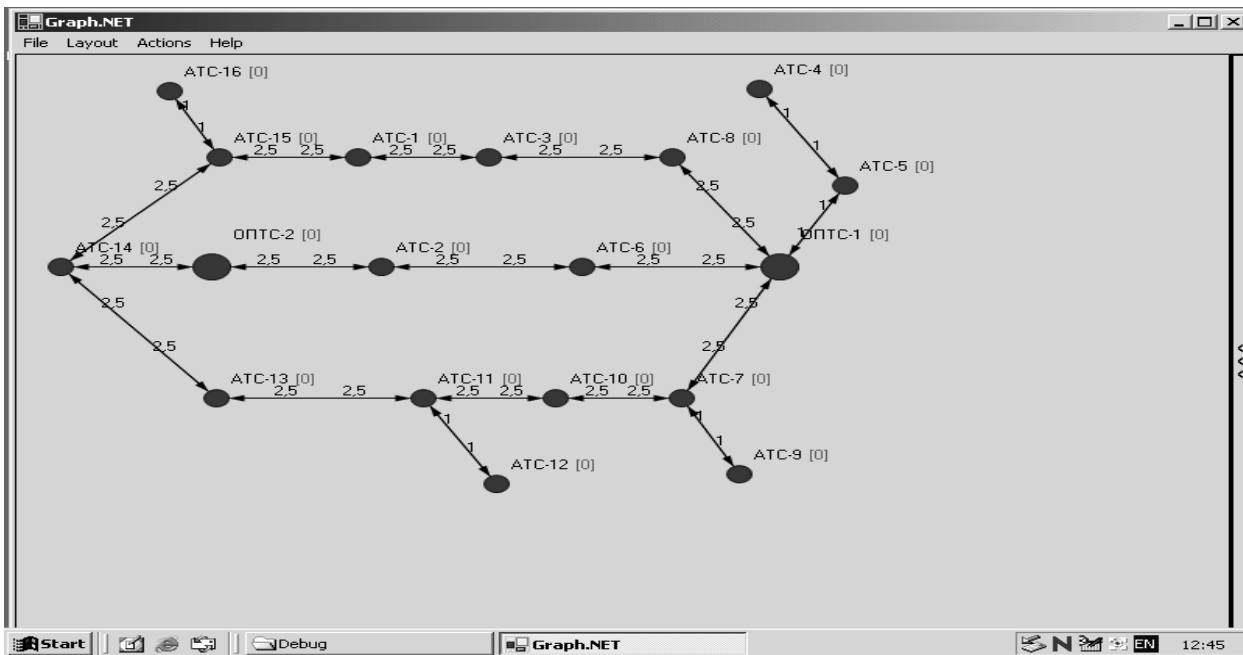


Рис. 2. Граф цифрової магістральної мережі м. Львова

### Алгоритм знаходження мінімального часу проходження сигналу у мережі

Класична постановка задачі про найкоротший шлях має такий вигляд [2]. Для заданої початкової вершини  $s$  та заданої кінцевої вершини  $t$  знайти найкоротший шлях у графі з  $s$  у  $t$ . Будемо називати початкову вершину входом (джерелом), кінцеву вершину виходом (стоком). Очевидна вимога зв'язності графа, для існування такого шляху взагалі. Або

$$\sum_{sk} c_{ij} \rightarrow \min \quad , \quad (1)$$

де  $S_k$  – шлях з вузла  $s$  у вузол  $t, k=s, \dots, t$ ;  $c_{ij}$  – довжина шляху з вузла  $i$  у вузол  $j$ .

Сформулюємо оптимізаційну задачу для знаходження мінімального часу проходження сигналу у синхронних телекомунікаційних мережах. Для заданого початкового вузла  $s$  та заданого кінцевого вузла  $t$  знайти таке проходження сигналу у мережі з  $s$  у  $t$ , щоб час встановлення з'єднання був мінімальним. Або

$$\sum_{sk} C_{ij} \rightarrow \min \quad , \quad (2)$$

де  $C_{ij}=c_{ij}+z_i$ ,  $z_i$  – час затримки у  $i$ -му вузлі. Залежно від навантаження мережі  $z_i$  може набувати різних значень.

Отже, серед всеможливих проходжень сигналу з вузла  $s$  у вузол  $t$  знайти шлях з мінімальною затримкою. У наведеній постановці до часу проходження сигналу по ребру додаємо час затримки у вузлі.

Позначимо досліджуваний граф через  $\Psi$ , а найкоротший шлях з  $s$  у  $t$  через  $SP(s,t)$  за критерієм часу проходження з'єднання. Починаємо розрахунок з входу  $s$ . Розглядаємо всі вузли, з ним зв'язані. Нехай вони утворюють множину  $D_1 = \{d_i \mid s-d_i \text{ належить } \Psi\}$ . Тут  $d_i$  позначає вузол, а  $s-d_i$  ребро графа  $\Psi$ . На першому кроці за оптимальний вибираємо той вузол, що реалізує найкоротшу затримку, або  $SP(s,t) = \min \{C_i \mid d_i \text{ належить } D_1\}$ . На другому кроці розглядаємо всю сукупність вузлів, що пов'язані з вузлами з множини  $D_1$  –  $D_2 = \{d_j \mid d_i-d_j \text{ належить } \Psi, d_i \text{ належить } D_1\}$ . Вибираємо той шлях, що реалізує найшвидше за часом проходження з'єднання з вузла входу  $s$  у вузол з множини  $D_2$ , або  $SP(s,t) = \min \{C_{ip} + C_{pj} \mid d_i \text{ належить } D_1, d_j \text{ належить } D_2\}$ . Перевірка того, чи дає просування вздовж цього ребра новий найкоротший шлях до вузла призначення, називається операцією послаблення ребра [5].

### Представлення графа ТКМ м.Львова у вигляді списку суміжних вузлів

Назва АТС	Список суміжних вузлів	Кількість суміжних вузлів
ОПТС-1	АТС-5, АТС-6, АТС-7, АТС-8	4
ОПТС-2	АТС-2, АТС-14,	2
АТС-1	АТС-3, АТС-15	2
АТС-2	ОПТС-2, АТС-6	2
АТС-3	АТС-1, АТС-8	2
АТС-4	АТС-5	1
АТС-5	ОПТС-1, АТС-4	2
АТС-6	ОПТС-1, АТС-2	2
АТС-7	ОПТС-14, АТС-9, АТС-10	3
АТС-8	ОПТС-1, АТС-3	2
АТС-9	АТС-7	1
АТС-10	АТС-7, АТС-11	2
АТС-11	АТС-10, АТС-12, АТС-13	3
АТС-12	АТС-11	1
АТС-13	АТС-11, АТС-14	2
АТС-14	ОПТС-1, АТС-13, АТС-15	3
АТС-15	АТС-1, АТС-14, АТС-16	3
АТС-16	АТС-15	1

Отже, на  $k$ -му кроці здійснюємо операцію послаблення ребра для множини  $D_k$ , що містить вузли, з'єднані ребрами з множиною  $D_{k-1}$ . Критерієм закінчення алгоритму є попадання виходу  $t$  у множину  $D_k$ . Отже, знайдений  $SP(s,t)$  реалізує найкоротший шлях проходження з'єднання з вузла входу сигналу у вузол виходу за критерієм часу затримки.

Описаний алгоритм відомий як алгоритм Дейкстри знаходження найкоротшого шляху у орієнтованому графі. Доведено [2], що алгоритм Дейкстри розв'язує задачу знаходження найкоротшого шляху за умови невід'ємності коефіцієнтів  $c_{ij}$ . У нашому випадку запропонована модифікація цього алгоритму з урахуванням особливостей інформаційних потоків та даних про затримку сигналів у вузлах.

Обговоримо можливість реалізації наведеного алгоритму на ЕОМ. У [5] доведено, що за допомогою алгоритму Дейкстри у загальному випадку можна знайти мінімальний шлях за час, пропорційний до  $N^2$ . Оскільки справедлива нерівність  $E \ll N(N-1)/2$ , то досліджувані графи є розрідженими. Для розріджених графів оцінка кількості обчислень пропорційна до  $E \lg N$ . Як доводиться у [5], при конкретних реалізаціях алгоритму Дейкстри на розріджених графах вдається досягти ще кращого часу обчислень за рахунок використання реалізацій черг з пріоритетами. Оскільки запропонована модифікація алгоритму не впливає на вибір вершин, а полягає у введенні додаткової операції підсумовування, то запропонований алгоритм також має кількість обчислень, пропорційну до  $E \lg N$ .

Для реалізації цього алгоритму використане подання графа у вигляді списку суміжних вершин. Для такого представлення легко реалізується описана вище операція послаблення ребра. Отже, запропонована модель та модифікований алгоритм реалізовані у комп'ютерній програмі, що може бути використана у мережах ВАТ "Укртелеком" для обчислень проходження оптимального з'єднання у реальному часі.

### Висновки

1. Запропонована модель ТКМ ВАТ "Укртелеком" у вигляді графа може бути використана для розрахунку оптимальних шляхів проходження з'єднання у синхронних телекомунікаційних мережах.

2. За допомогою запропонованої модифікації класичного алгоритму Дейкстри стосовно особливостей телекомунікаційних мереж розраховують оптимальні шляхи проходження сигналу у ТКМ з урахуванням різних режимів навантаження мережі та затримки сигналу у вузлах.

3. На базі розробленої моделі можна реалізувати інші алгоритми для знаходження оптимальних параметрів функціонування мережі, наприклад, пошук максимального потоку.

4. Розроблена модель дає змогу врахувати не тільки різні режими навантаження в мережі та час затримки, а також інші особливості ТКМ, зокрема, пакетність передавання інформації.

1. Бірюков М.Л., Стеклов В.К., Костік Б.Я. *Транспортні мережі телекомунікацій*. – К., 2005.
2. Форд Л., Фалкерсон Д. *Потоки в сетях*. – М., 1962.
3. Ху Т. *Целочисленное программирование и потоки в сетях*. – М., 1974.
4. *Основи дискретної математики: Підручник для студ.техніч. вузів* / Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Лещевський, Г.М. Луцький, М.К. Печурін. – К., 2000.
5. Седжвик Р. *Фундаментальные алгоритмы на С++*. Часть 5. *Алгоритмы на графах*. – К., 2004.
6. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. *Алгоритмы. Построение и анализ*. – М., 2005.