

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ В ШАРУВАТИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

© Копитко М.Ф., 2006

Для розв'язування задач фільтрації рідини у багат шарових пористих середовищах запропоновано числово-аналітичний підхід, який ґрунтується на поданні функції напору за товщиною шарів у вигляді скінченної суми поліномів Лежандра і використанні ізопараметричних квадратичних скінченних елементів для апроксимації за двома іншими координатами. Розгляд задачі в криволінійній системі координат дає змогу максимально враховувати реальну геометрію середовища. На модельних прикладах досліджено залежність напору і швидкості фільтрації від товщин і коефіцієнтів фільтрації шарів.

The numerical-analytical approach is offered for solution of liquid filtration problems in multilayer porous curvilinear layers which is based on approximation of the pressure function by the layer thickness as the finite sum of Legendre polynomials and by isoparametric quadratic elements by two other coordinates. Investigation of the problem in curvilinear coordinates allows taking into account real geometry of the medium in most accurate way. Dependence of head and filtration velocity on thicknesses and curvature of layers is investigated on model examples.

Дослідження фільтрації рідини в пористих середовищах є актуальним завданням як з погляду практичного застосування, так і їхнього математичного моделювання. Цій проблемі присвячено багато праць, короткий огляд яких є в [1, 3–5]. Більшість відомих постановок зводиться до двовимірних крайових задач. У цій роботі розглядається фільтрація рідини у тривимірних криволінійних шаруватих пористих середовищах. Для розв'язування задачі запропоновано числово-аналітичний метод, який дає змогу будувати ієрархічні математичні моделі фільтрації рідини, задаючи аналітичне представлення функції напору за однією з координат. Використання такої постановки задачі дає змогу досліджувати вплив на параметри фільтрації кривин шарів, їхньої проникності і товщини.

### Постановка задачі

Розглядається напірна фільтрація рідини у тривимірному шаруватому пористому середовищі, геометрію якого можна описати у криволінійній системі координат, побудованій так. Нехай

$$\bar{r} = \bar{r}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega \quad (1)$$

векторне рівняння деякої поверхні в просторі, віднесеному до головних кривин. У кожній точці поверхні введемо ортогональний триєдр

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{A_1} \bar{r}_{\alpha_1}, \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{A_2} \bar{r}_{\alpha_2}, \quad \bar{e}_n = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2, \quad (2)$$

де  $\bar{r}_{\alpha_1} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1}$ ,  $\bar{r}_{\alpha_2} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2}$ ;  $A_1 = \sqrt{\bar{r}_{\alpha_1} \bar{r}_{\alpha_1}}$ ,  $A_2 = \sqrt{\bar{r}_{\alpha_2} \bar{r}_{\alpha_2}}$  – коефіцієнти Ляме поверхні (1).

Радіус-вектор довільної точки пористого середовища подамо у вигляді

$$\bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \bar{n}(\alpha_1, \alpha_2) \alpha_3, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, \quad z^0(\alpha_1, \alpha_2) \leq \alpha_3 \leq z^l(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3)$$

де  $\bar{n}$  – нормаль до поверхні (1),  $l$  – кількість шарів.

Коефіцієнти Ляме  $H_i$  для криволінійної системи координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  мають вигляд

$$H_1 = A_1(1 + \kappa_1 \alpha_3), H_2 = A_2(1 + \kappa_2 \alpha_3), H_3 = 1, \quad (4)$$

де  $\kappa_1(\alpha_1, \alpha_2), \kappa_2(\alpha_1, \alpha_2)$  – головні кривини поверхні (1).

Будемо вважати, що кожний шар займає об'єм, який обмежений двома лицьовими поверхнями  $z^{i-1}(\alpha_1, \alpha_2), z^i(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$  і бічною поверхнею  $S_n^i = S_{11}^i \cup S_{12}^i \cup S_{21}^i \cup S_{22}^i, i = 1, \dots, l$ . Бічні поверхні утворені рухом нормалі  $\vec{n}$  до поверхні (1) вздовж координатних ліній  $\alpha_1 = \alpha_1^{1const}, \alpha_1 = \alpha_1^{2const}, \alpha_2 = \alpha_2^{1const}, \alpha_2 = \alpha_2^{2const}$ .

У кожному шарі фільтрація рідини задовольняє закон Дарсі і описується рівнянням

$$\frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{k_{11}^i H_2}{H_1} \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{k_{22}^i H_1}{H_2} \frac{\partial h}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( k_{33}^i H_1 H_2 \frac{\partial h}{\partial \alpha_3} \right) \right] = 0 \quad (5)$$

де  $k_{jj}^i, i = 1, \dots, l, j = 1, 2, 3$  – коефіцієнти фільтрації,  $h = \frac{P}{\rho g} + z$  – п'езометричний напір,  $\rho$  – густина рідини,  $P$  – гідродинамічний тиск в рідині,  $g$  – прискорення сили тяжіння,  $z$  – висота рухомої частинки рідини над деякою горизонтальною площиною.

У матричному вигляді рівняння (5) запишеться так

$$\text{div}(\mathbf{K} \text{ grad } h) = 0, \quad (6)$$

$$\text{де } \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^i & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^i & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^i \end{bmatrix}.$$

Рівняння (6) доповнюється відповідними граничними умовами, серед яких розглянемо найуживаніші. Будемо вважати, що кожна поверхня границі складається з двох частин. На одній задаються умови контакту середовища з водоймою, а на другій – відома густина потоку рідини. За вказаних допущень граничні умови контакту частини границі середовища з водоймою матимуть вигляд

$$h(\alpha_1^1, \alpha_2, \alpha_3) = h_{11}^i(\alpha_2, \alpha_3) \quad (\alpha_2, \alpha_3) \in S_{11}^i \quad (7)$$

$$h(\alpha_1^2, \alpha_2, \alpha_3) = h_{12}^i(\alpha_2, \alpha_3) \quad (\alpha_2, \alpha_3) \in S_{12}^i \quad (8)$$

$$h(\alpha_1, \alpha_2^1, \alpha_3) = h_{21}^i(\alpha_1, \alpha_3) \quad (\alpha_1, \alpha_3) \in S_{21}^i \quad (9)$$

$$h(\alpha_1, \alpha_2^2, \alpha_3) = h_{22}^i(\alpha_1, \alpha_3) \quad (\alpha_1, \alpha_3) \in S_{22}^i \quad (10)$$

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in z^0) = h_{31}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega \quad (11)$$

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in z^l) = h_{32}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega \quad (12)$$

На частинах граничних поверхонь, на яких відомий розподіл густини потоку рідини, умови мають вигляд

$$(\mathbf{K} \text{ grad } h) \mathbf{v}^0 = q_{31}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, \alpha_3 \in z^0, \quad (13)$$

$$(\mathbf{K} \text{ grad } h) \mathbf{v}^l = q_{32}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, \alpha_3 \in z^l, \quad (14)$$

$$\frac{k_{11}^i}{H_1} \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} = q_{11}^i(\alpha_2, \alpha_3) \quad (\alpha_2, \alpha_3) \in S_{11}^i, \quad (15)$$

$$\frac{k_{11}^i}{H_1} \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} = q_{12}^i(\alpha_2, \alpha_3) \quad (\alpha_2, \alpha_3) \in S_{12}^i, \quad (16)$$

$$\frac{k_{22}^i}{H_2} \frac{\partial h}{\partial \alpha_2} = q_{21}^i(\alpha_1, \alpha_3) \quad (\alpha_1, \alpha_3) \in S_{21}^i, \quad (17)$$

$$\frac{k_{22}^i}{H_2} \frac{\partial h}{\partial \alpha_2} = q_{22}^i(\alpha_1, \alpha_3) \quad (\alpha_1, \alpha_3) \in S_{22}^i, \quad (18)$$

де  $\mathbf{v}^0$  – нормаль до поверхні  $z^0$ ,  $\mathbf{v}^l$  – нормаль до поверхні  $z^l$ .

На границях  $z^i(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, i = 1, \dots, l-1$  стику шарів задають умови “ідеального” контакту, тобто неперервність напорів і рівність нормальних потоків рідини:

$$[h] = 0, \quad (19)$$

$$(\mathbf{K} \text{grad } h)\mathbf{v}^- = (\mathbf{K} \text{grad } h)\mathbf{v}^+. \quad (20)$$

### Варіаційне формулювання задачі

Ввівши простір функцій  $\mathbf{V} = \{v \in H^1(\Omega \times \{z^0, z^1\} \times \dots \times \{z^{l-1}, z^l\}) \mid v = 0 \text{ на } S_{ij}^k, i, j = 1, 2, k = 1, \dots, l; z^0; z^l\}$ , для задачі (6)–(20) запишемо варіаційне формулювання.

Необхідно знайти функцію  $h \in \mathbf{V}$  і надає мінімуму функціонала енергію

$$\begin{aligned} I(h) = & \sum_{i=1}^l \iint_{\Omega} \left\{ \int_{z^{i-1}(\alpha_1, \alpha_2)}^{z^i(\alpha_1, \alpha_2)} \text{grad } h \mathbf{K} \text{grad } h A_1 A_2 (1 + \kappa_1 \alpha_3)(1 + \kappa_2 \alpha_3) d\alpha_3 \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ & - 2 \iint_{\Omega} q_{31} h A_1 A_2 (1 + \kappa_1 z^0)(1 + \kappa_2 z^0) d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ & - 2 \iint_{\Omega} q_{32} h A_1 A_2 (1 + \kappa_1 z^l)(1 + \kappa_2 z^l) d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ & - 2 \sum_{i=1}^l \int_{\alpha_1^1 z^{i-1}}^{\alpha_1^2 z^i} \int_{\alpha_2^1 z^{i-1}}^{\alpha_2^2 z^i} q_{11}^i h H_2 d\alpha_3 d\alpha_2 - 2 \sum_{i=1}^l \int_{\alpha_1^1 z^{i-1}}^{\alpha_1^2 z^i} \int_{\alpha_2^1 z^{i-1}}^{\alpha_2^2 z^i} q_{12}^i h H_2 d\alpha_3 d\alpha_2 - \\ & - 2 \sum_{i=1}^l \int_{\alpha_1^1 z^{i-1}}^{\alpha_1^2 z^i} \int_{\alpha_2^1 z^{i-1}}^{\alpha_2^2 z^i} q_{21}^i h H_1 d\alpha_3 d\alpha_1 - 2 \sum_{i=1}^l \int_{\alpha_1^1 z^{i-1}}^{\alpha_1^2 z^i} \int_{\alpha_2^1 z^{i-1}}^{\alpha_2^2 z^i} q_{22}^i h H_1 d\alpha_3 d\alpha_1 \end{aligned} \quad (21)$$

### Метод розв’язування

Для розв’язування задачі (21) використаємо числово-аналітичний підхід, який полягає в поданні шуканого розв’язку за координатою  $\alpha_3$  у вигляді скінченної суми за поліномами Лежандра [7], а в області  $\Omega$  у використанні схеми методу скінченних елементів

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{m=0}^M h_m(\alpha_1, \alpha_2) P_m(\alpha_3) \quad (22)$$

де  $P_m(\alpha_3)$  – поліноми Лежандра,  $h_m(\alpha_1, \alpha_2)$  – невідомі функції, для подання яких використовуються скінченно-елементні апроксимації.

Враховуючи, що за змінною  $\alpha_3$  використовується аналітичне представлення розв’язку, то логічним є виділення інтегрування за цією змінною у формулі (21) і обчислення його точно. Після застосування методу скінченних елементів і виконання певних перетворень отримуємо функціонал (21) у вигляді матричного рівняння

$$I(h) = \iint_{\Omega} \mathbf{h}_p^T \mathbf{G} \mathbf{h}_p d\alpha_1 d\alpha_2 - 2 \iint_{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{h}_p d\alpha_1 d\alpha_2 - 2 \sum_{i=1}^l \int_{\alpha_1^1 z^{i-1}}^{\alpha_1^2 z^i} \int_{\alpha_2^1 z^{i-1}}^{\alpha_2^2 z^i} \mathbf{Q} \mathbf{h}_p d\alpha_3 d\alpha_2 - 2 \sum_{i=1}^l \int_{\alpha_1^1 z^{i-1}}^{\alpha_1^2 z^i} \int_{\alpha_2^1 z^{i-1}}^{\alpha_2^2 z^i} \mathbf{Q} \mathbf{h}_p d\alpha_3 d\alpha_1, \quad (23)$$

де  $\mathbf{h}_p$  – вектор невідомих коефіцієнтів розкладу (22) у вузлах сітки скінченних елементів. Записавши умову мінімуму функціонала (23) відносно вектора  $\mathbf{h}_p$ , одержимо систему лінійних рівнянь вигляду

$$\mathbf{G} \mathbf{h}_p = \mathbf{B}. \quad (24)$$

Систему лінійних рівнянь (24) розв’язуємо методом Гаусса.

### Розв’язування модельних задач

*Приклад 1. Дослідження методу розв’язування для однорідного середовища.* Розглянемо фільтрацію рідини в пористому середовищі, яке має вигляд паралелепіпеда ( $\alpha_1^1 = 0, \alpha_1^2 = 1, \alpha_2^1 = 1, \alpha_2^2 = 1, z^0 = 1, z^1 = 0.25$ ), тобто кількість шарів  $l = 1$ . У цьому разі параметри

геометрії дорівнюють  $\kappa_i = 0, H_i = 1, i = 1, 2, 3$ . Будемо вважати, що справджуються граничні умови (7), (8), (13), (14), (17), (18),  $h_{1j}^1 = 0, q_{2j}^i = 0, j = 1, 2, q_{31} = 1, q_{32} = 0$ . Середовище ізотропне з коефіцієнтами фільтрації  $k_{ii}^1 = 1, i = 1, 2, 3$ .

Розв'язували задачу для різних значень  $M$  у формулі (22) і на різних скінченно-елементних сітках. За еталонний брали розв'язок задачі, отриманий за допомогою пакета FEMLAB 3.0a на сітці з 192537 лагранжевих квадратичних елементів. На рис.1 наведено графіки напору залежно від координати  $\alpha_3$  при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ . Як видно з отриманих результатів, залежність напору далека від лінійної ( $M=1$ ) і для  $M \geq 3$  добре збігається з еталонним розв'язком.

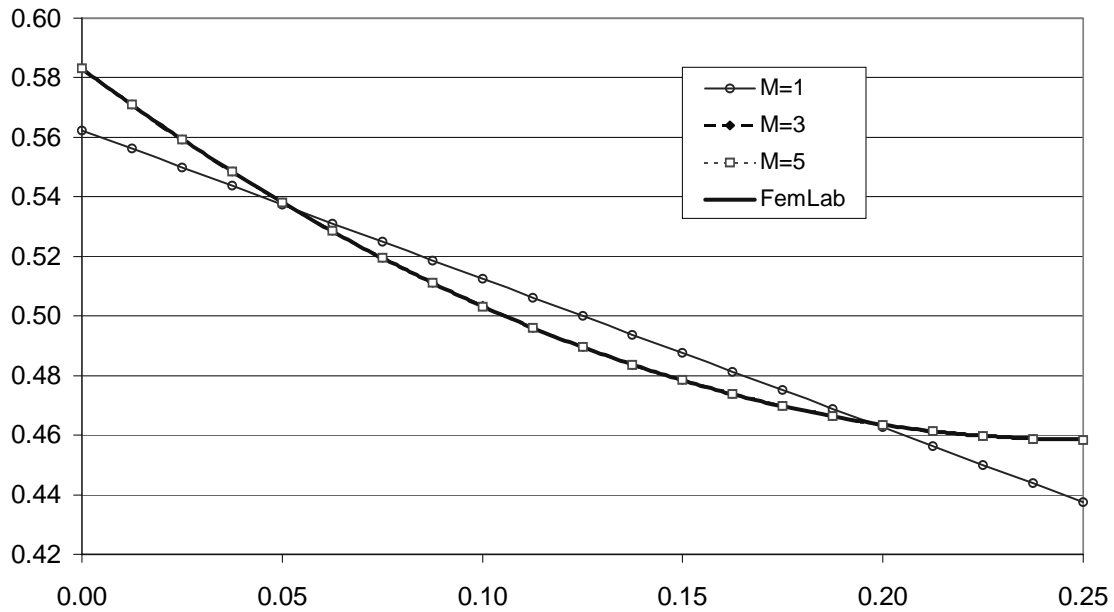


Рис. 1. Графіки напору залежно від степеня поліномів Лежандра

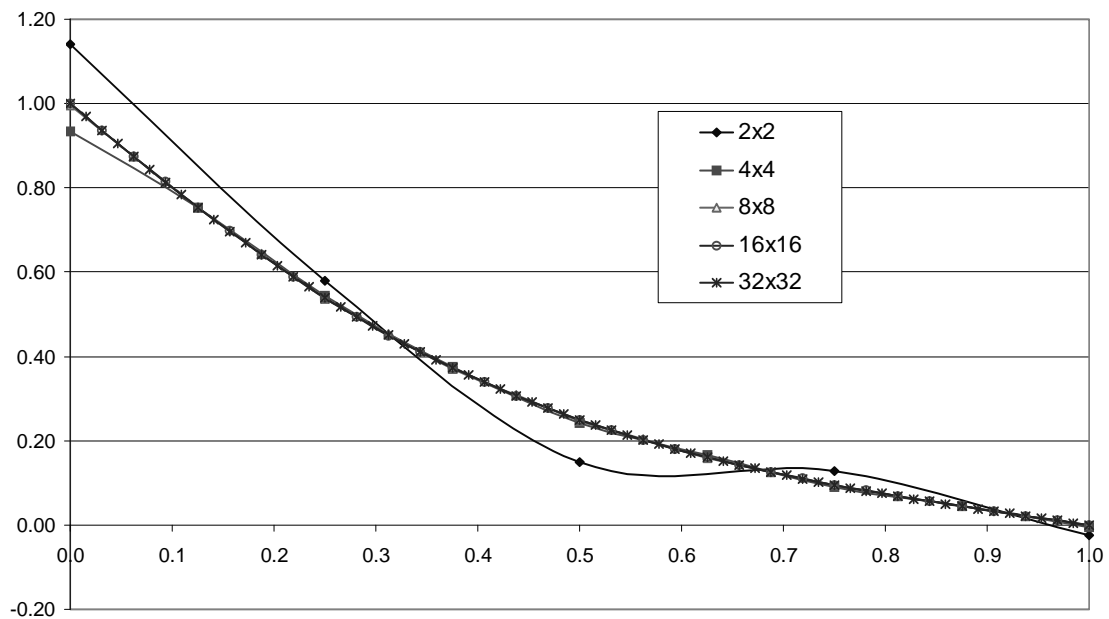


Рис. 2. Залежність швидкості  $v_2$  від кількості скінченних елементів

Для дослідження збіжності розв'язку від кількості скінченних елементів розв'язувалась попередня задача для таких параметрів:  $z^1 = 1$ ,  $h_{1j}^1 = 0$ ,  $q_{3j} = 0$ ,  $j = 1, 2$ ,  $q_{21}^1 = 1$ ,  $q_{22}^1 = 0$ . На рис.2 наведено значення швидкості фільтрації  $v_2$  залежно від  $\alpha_2$ , якщо  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0.5$ . Графіки відповідають різним поділам області  $\Omega$  на чотирикутні квадратичні скінченні елементи. Як видно з рис. 2, розв'язок задачі швидко збігається і добре задовольняє граничні умови, якщо  $\alpha_2 = 0, \alpha_2 = 1$ .

**Приклад 2. Фільтрація рідини в шаруватому середовищі.** Розглянемо задачу, яка в певному наближенні моделює берег водойми. Зверху на поверхню ґрунту падають опади. Будемо досліджувати фільтрацію рідини в середовищі, яке складається з трьох шарів різної товщини і проникності, займає об'єм  $\alpha_1^1 = 0, \alpha_1^2 = 1, \alpha_2^1 = 1, \alpha_2^2 = 1, z^0 = 1, z^3 = 0.5$ . Введемо позначення  $k_1 = k_{jj}^1/k_0, k_2 = k_{jj}^2/k_0, k_3 = k_{jj}^3/k_0, j = 1, 2, 3$ , де  $k_0$  – коефіцієнт фільтрації деякого ґрунту середньої проникності. Параметри  $k_1, k_2, k_3$  характеризують відносну проникність шарів. На границях середовища задані умови (10), (13)–(17) за таких параметрів  $q_{1j}^i = 0, j = 1, 2, h_{22} = 0.5, q_{21}^i = 0, q_{31} = 0, q_{32} = 0.1, i = 1, 2, 3$ . Дослідження проводились для випадку, коли два зовнішні шари мають однакову проникливість ( $k_1 = k_3 = 1$ ), а середній слабо або сильно проникний ( $k_2 = 0.01$  або  $k_2 = 100$ ). Товщину шарів вибирали різною, але так, щоб загальна товщина середовища завжди дорівнювала 0.5. На рис.3 наведено графіки функції напору вздовж товщини середовища, для таких значень товщини шарів:  $z^0 = 0, z^1 = 0.17, z^2 = 0.33, z^3 = 0.5$ .

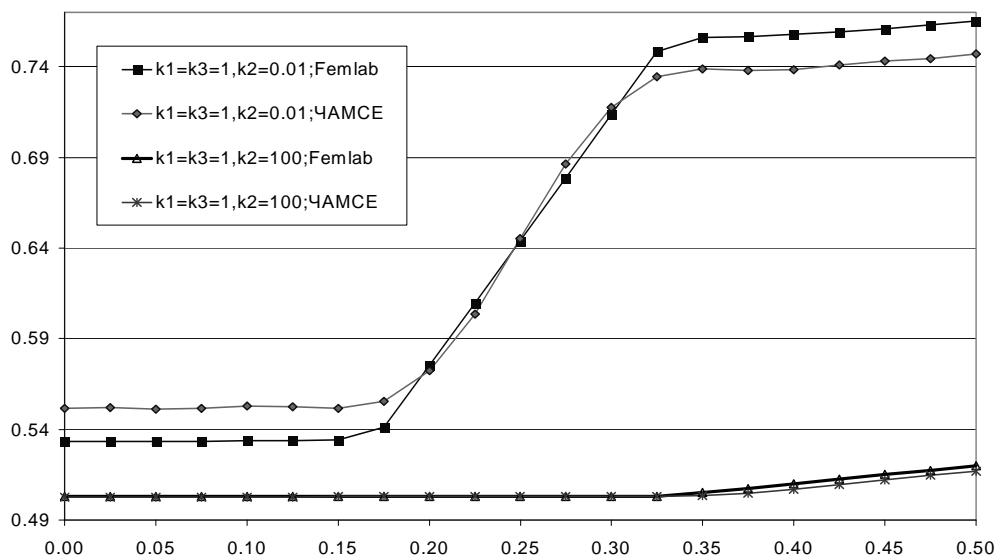


Рис. 3. Розподіл функції напору залежно від координати  $\alpha_3$  (товщина пакета шарів)

Задача розв'язувалась за допомогою пакета FEMLAB 3.0a та числово-аналітичним методом (ЧАМСЕ), який розглядається в цій роботі. Наведені графіки показують, що для сильно проникних шарів ( $k_2 = 100$ ) запропонований підхід дає кращі результати, ніж для слабо проникних ( $k_2 = 0.01$ ). Використання формули (22) представлення напору для пакета шарів загалом вимагає використання багатьох членів розкладу для отримання задовільних результатів.

Ця сама задача розв'язувалась і для порівняно тонкого (0.02) середнього шару. У такому разі  $z^0 = 0, z^1 = 0.24, z^2 = 0.26, z^3 = 0.5$ . На рис. 4 наведено графіки напору, аналогічні до рис. 3. Лінією виду “—○—” зображено значення напору для однорідного середовища.

Як видно з рис. 4, для слабо проникних шарів малої товщини результати, отримані за допомогою ЧАМСЕ ( $M=11$ ), не можна назвати навіть задовільними (графік не відображає якісно розподілу напору вздовж товщини середовища). Очевидно, що для урахування тонких слабо проникних включень необхідно використовувати інші підходи, зокрема, запропоновані в [3].

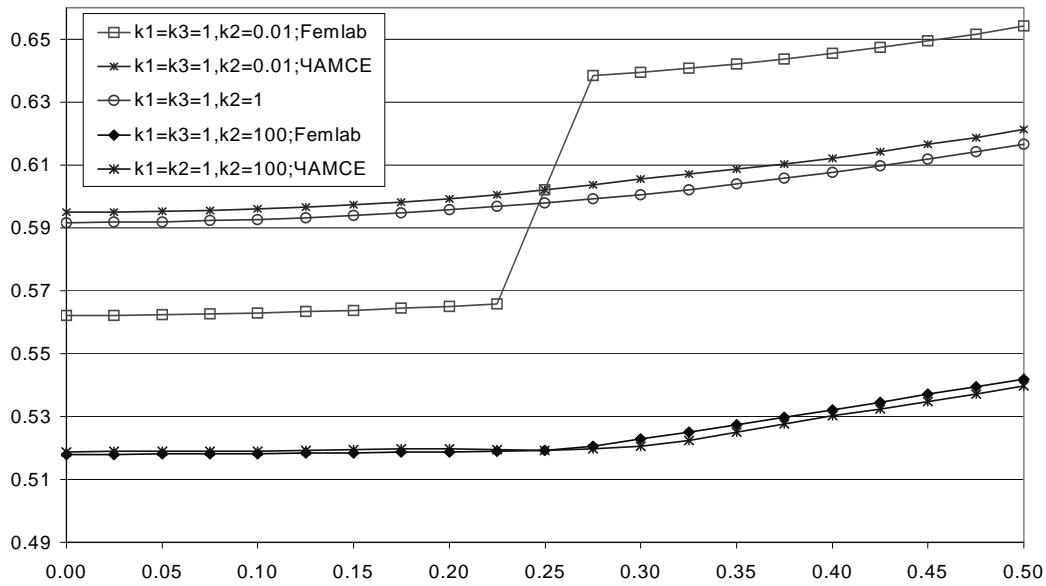


Рис. 4. Функція напору для товщин шарів  $z^0 = 0, z^1 = 0.24, z^2 = 0.26, z^3 = 0.5$

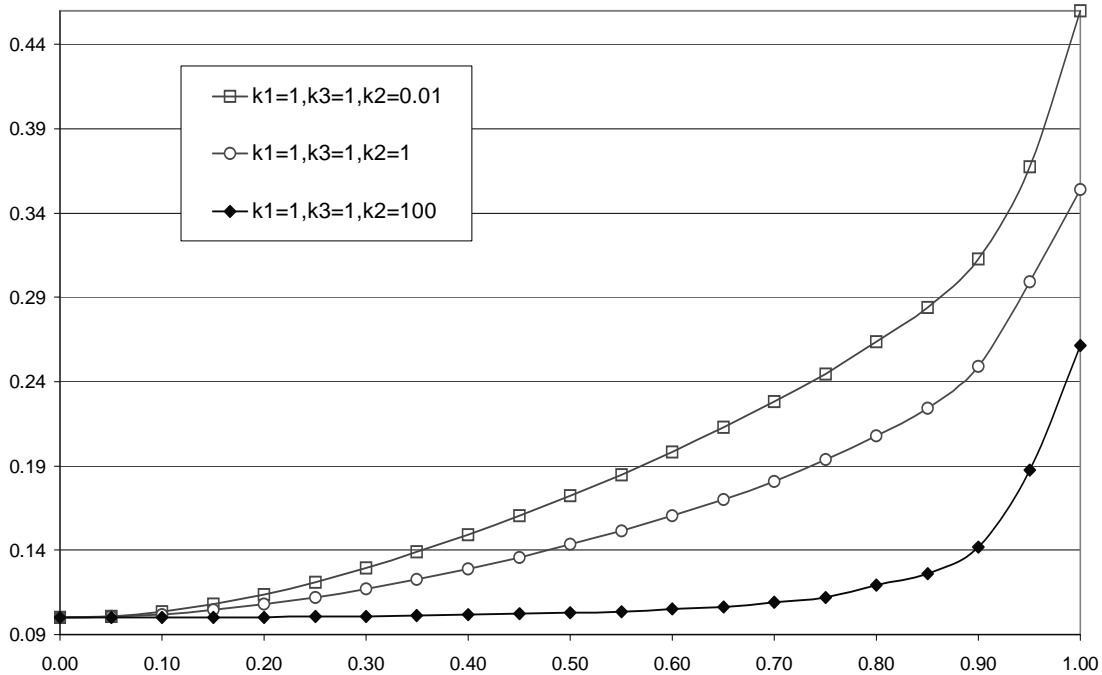


Рис.5. Значення потоку рідини на зовнішній поверхні середовища вздовж координати  $\alpha_2$

Досліджувався вплив проникності середнього шару (включення) на інші фільтраційні параметри. На рис.5 наведено значення потоку на верхній поверхні середовища. Наявність у середовищі тонкого слабо проникного шару ( $k_2 = 0.01$ ) значно підвищує потік рідини на поверхні (особливо біля водойми).

#### Висновки

Розв'язування тривимірних задач фільтрації рідини для неканонічних областей вимагає розроблення нових ефективних методів. Запропонований у роботі підхід до дослідження фільтрації рідини в шаруватих пористих середовищах дає змогу отримувати хороші результати як для однорідних, так і для шарів різної проникності. Виконані дослідження показують, що для тонких

слабко проникних включень не завжди вдається отримати хороші результати, використовуючи скінченні ряди поліномів Лежандра для представлення функції напору для пакету шарів загалом. Наявність сильно або слабо проникних шарів у пористих середовищах значно (якісно і кількісно) впливає на розподіл фільтраційних параметрів як за товщиною середовища, так і на поверхні.

1. Дубовик А.В., Копитко М.Ф. Розв'язування задачі фільтрації в циліндричній області з горизонтальною свердловиною МСЕ // Волинск. математ. вісник. –1998.– Вип. 5.– С. 56-60. 2. Копитко М.Ф., Савула Я.Г. Алгоритмічний підхід до дослідження задач пружного деформування оболонок // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. –Вип. 46.– С. 10-16. 3. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991. 4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод.– М., 1977. 5. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М., 1969. 6. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.,1977. 7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М., 1981.

УДК 681.32.03

М.М. Климаш, І.М. Дронюк, М.І. Олексін  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра телекомунікацій

## МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНОК ОПТИМАЛЬНИХ ШЛЯХІВ З'ЄДНАННЯ У ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖАХ

© Климаш М.М., Дронюк І.М., Олексін М.І., 2006

**Побудована модель цифрових магістральних мереж ВАТ “Укртелеком” у вигляді простого планарного графа. Характеризуються властивості запропонованого графа. Запропоновано модифікацію алгоритму Дейкстри для знаходження мінімального часу проходження з'єднання у телекомунікаційній мережі.**

**The model of network VAT “Ukrtelecom” as simple planar graph is presented. Properties of the graph are considered. The modified Dijkstra’s algorithm for optimal path is proposed for minimal time connection in telecommunication network.**

### Вступ

Сучасний стан розвитку суспільства тісно пов'язаний з поняттям “мережа”. Нас оточують мережі магазинів, мережі автодоріг, залізничного та авіатранспорту, комп'ютерні мережі та багато інших мереж. Серед них за важливістю одне з перших місць займають мережі засобів зв'язку. Транспортні мережі електрозв'язку широко застосовуються у сучасній техніці, а також у щоденному житті людини. Особливістю таких мереж є перенесення інформаційних потоків електронними засобами [1]. Імітаційне моделювання широко використовують для дослідження мереж різних класів, оскільки воно дає змогу оцінити ефективність роботи та визначити напрями удосконалення мережі.

### Постановка задачі

Для передавання інформації з одного місця до іншого застосовують транспортні мережі електрозв'язку. В основу поняття “транспортна мережа” покладено функціональний принцип [1]. Воно відповідає прийнятому у зв'язківців терміну “первинна мережа”. Основна функція первинної мережі полягає у передаванні – транспортуванні інформації між пунктами. Це може бути інформація телефонних абонентів, користувачів Інтернету, програм телебачення, контролю і технічного обслуговування мережі, сигнали взаємодії між комутаційними станціями, інформація обліку вартості послуг – тарифікації тощо [1].

Відомо, що багато класів задач, що стосуються транспортних мереж, можна розглядати як задачі на графах [2]. Проте для ефективного імітаційного моделювання телекомунікаційних мереж