

# МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ ПРОЕКТУВАННЯ

УДК 519.6

В.М. Макар

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра систем автоматизованого проектування

## НОВИЙ БЕЗСІТКОВИЙ МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

© Макар В.М., 2006

Запропоновано новий підхід до розв'язання нестационарних задач теплопровідності, який не потребує просторової дискретизації області ні для інтерполювання невідомої функції, ні для інтегрування варіаційної форми. Безсітковий підхід ґрунтується на побудованій локальній слабкій варіаційній формі нестационарного рівняння теплопровідності. Розроблено схему методу найменших квадратів побудови безсіткової апроксимації пробної функції, а також алгоритм реалізації запропонованого безсіткового методу.

**New approach for solving transient heat conduction problems, which does not need a spatial finite element discretization either for purposes of interpolation of the solution variables, or for the integration of weak form, is presented. The meshless approach is based on a developed local weak form for linear transient heat conduction equation. A scheme of least squares method for meshless approximation of trial function is developed. The routine for the implementation of the present meshless method is proposed, as well.**

### Вступ

Сучасний стан галузі мікроелектроніки характеризується подальшою інтенсифікацією мініатюризації, технологічний процес виготовлення і, відповідно, розміри сучасних МЕР належать уже до світу нанотехнологій. Як наслідок, значно ускладнюються вимоги і задачі, які постають перед проектувальниками. Насамперед, виникає нагальна і об'єктивна необхідність принципово якісних змін методів числового моделювання. Це пов'язано з тим, що найпоширеніші нині числові методи, такі, як метод скінченних елементів, метод скінченних різниць та метод граничних елементів вимагають покриття об'єкта проектування сіткою елементів, розміри яких неприпустимо малі і приводять до виродження матриць дискретних моделей і втрати стійкості числових схем. Ця проблема має принциповий характер, пов'язаний з “сітковою” природою цих методів, і отже, є неусувною. У зв'язку з цим останнім часом провідні фахівці у галузі математичного моделювання дуже активно ведуть пошуки нових методів моделювання, які б усували головну причину проблеми, тобто “сітковий” характер, що й зумовило виникнення спільної назви meshless або безсіткові методи [1].

Активні роботи з розроблення та дослідження безсіткових методів розпочалися після публікації статті [2]. Відтоді декілька варіантів безсіткових методів було запропоновано різними авторами [3–6]. Всі вони відрізняються один від одного лише способом інтерполяції пробної функції, але в основі своїй вони базуються на глобальній варіаційній формі та методі Гальоркіна. Характерною особливістю цих методів є також те, що всі вони все ж вимагають побудови деякої початкової сітки скінченних елементів, яка використовується для інтегрування слабкої форми. Отже, ці методи дають змогу лише частково розв'язати “сіткову” проблему, і саме вони дають можливість здійснити лише безсіткову інтерполяцію пробної функції.

Останні дослідження в галузі розроблення та застосування безсіткових підходів до розв'язання крайових задач математичної фізики показують, що, для того щоб розвинути дійсно безсітковий метод, повинна використовуватись локальна слабка варіаційна форма [7–9]. Тільки такий підхід не потребує сітки скінченних елементів ні для інтерполювання, ні для інтегрування: усі інтеграли беруть за сферами у 3-D випадку і за колом у 2-D випадку з центром у точці дослідження. Мало того, він дає змогу зберегти локальний характер апроксимації пробної функції, а також забезпечити досягнення вищих порядків неперервних апроксимацій (включно з  $C^\infty$  апроксимаціями) у дуже простий і безпосередній спосіб. Тому першочерговим завданням під час розробки справді безсіткової числової схеми є побудова локальної слабкої варіаційної форми.

У цій роботі побудовано локальну слабку варіаційну форму нестационарного рівняння теплопровідності. На її підставі розвинено дійсно безсітковий метод, який не потребує просторової дискретизації області, ні для інтерполювання невідомої функції, ні для інтегрування варіаційної форми. Для побудови безсіткової апроксимації пробної функції розроблено схему методу найменших квадратів.

## 1. Диференціальна постановка нестационарної задачі теплопровідності

Нехай в області  $\Omega$ , заповненій деяким середовищем, у певний спосіб визначено температурне поле, тобто у кожній точці  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \Omega$  у момент часу  $t \in [0, T]$  задана температура  $u(\mathbf{x}, t)$ . Тоді, якщо для середовища виконується закон Фур'є, то температура у кожній внутрішній точці тіла  $\Omega$  повинна задовольняти рівняння теплопровідності [10]

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} u) + F(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина середовища,  $c$  – коефіцієнт питомої теплоємності,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $F(\mathbf{x}, t)$  – питома потужність внутрішніх джерел тепла. Будемо вважати середовище однорідним та ізотропним, тобто  $\rho = \operatorname{const}$ ,  $c = \operatorname{const}$ ,  $\lambda = \operatorname{const}$ .

Вплив оточуючого середовища на поверхню  $\Gamma = \partial\Omega$  області  $\Omega$  задається у кожний момент часу  $t$  граничними умовами:

$$u = \tilde{u} \quad \text{на } \Gamma_u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv q = \tilde{q} \quad \text{на } \Gamma_q, \quad (3)$$

де  $\tilde{u}$  – заданий розподіл температури на частині поверхні тіла  $\Gamma_u$  в момент часу  $t \geq 0$ ,  $\tilde{q}$  – густина заданого теплового потоку через частину поверхні тіла  $\Gamma_q$ ,  $n$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні  $\Gamma_q$ ,  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ .

Для визначення температурного поля всередині області  $\Omega$  у будь-який момент часу необхідно задати його розподіл у початковий момент часу, тобто початкову умову:

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Отже, з диференціального рівняння (1), граничних умов (2)–(3) і початкової умови (4) можна знайти функцію розподілу температури  $u(\mathbf{x}, t)$  у довільний момент часу  $t$ .

## 2. Локальна слабка варіаційна постановка

Для того, щоб побудувати дійсно безсітковий метод розв'язання початково-крайової задачі (1)–(4), необхідно отримати її локальну слабку форму. Локальна слабка форма забезпечує чітку концепцію для локального безсіткового інтегрування, яка не потребує взагалі ні просторової дискретизації області, ні навіть так званих комірок фонового інтегрування. Також вона приводить до природного способу побудови глобальної матриці жорсткості: не через інтегрування за суміжними елементами і асемблювання локальних матриць жорсткості елементів сітки, а через

інтегрування по локальних підобластях, причому ці локальні підобласті можуть взаємно перетинатися. На противагу традиційному методу скінченних елементів у формі Гальоркіна, який ґрунтується на глобальній слабкій формі, дійсно безсітковий метод походить з слабкої форми у підобласті  $\Omega_s$ , яка повністю розташована в області  $\Omega$ . З міркувань зручності локальну підобласть  $\Omega_s$  беруть у вигляді сфери (або кола у двовимірному випадку).

Алгоритм побудови локальної слабкої форми починається, як і у разі глобальної слабкої форми з уведення просторів функцій, на яких шукатимуть розв'язок. Отже, уведемо до розгляду простір Соболева першого порядку

$$W_2^{(1)}(\Omega_s) \equiv H^1(\Omega_s) = \left\{ v \in L_2(\Omega_s), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega_s), i = 1, 2, 3 \right\}, \quad (5)$$

та енергетичний простір оператора задачі (1)–(4)

$$H_A = \left\{ u(\mathbf{x}, t) : u \in H^1(\Omega_s) \right\} \quad (6)$$

зі скалярним добутком

$$a(u, v) = \int_{\Omega_s} \lambda \cdot \text{gradu} \cdot \text{grad}v \, d\Omega. \quad (7)$$

Визначимо також скалярні добутки в  $L_2(\Omega_s)$  і в  $L_2(\Gamma_{sq})$ :

$$(u, v) = \int_{\Omega_s} u \cdot v \, d\Omega, \quad (8)$$

$$\langle u, v \rangle_i = \int_{\Gamma_{si}} u \cdot v \, d\Gamma. \quad (9)$$

Тоді, згідно з класичним методом зважених нев'язок [11], узагальнена локальна слабка форма диференціального рівняння (1) та граничної умови (3) у локальній підобласті  $\Omega_s$  може бути виражена так

$$\int_{\Omega_s} \{ \lambda \Delta u + F - c\rho u' \} v \, d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{su}} (u - \tilde{u}) v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H_A, \quad (10)$$

де  $u$  – пробна функція,  $v$  – тестова функція,  $\Gamma_{su}$  – частина границі  $\partial\Omega_s$  області  $\Omega_s$ , на якій задані головні граничні умови типу (2),  $\alpha$  – параметр штрафу, а через  $u'$  позначено часткову похідну за часовою координатою  $t$ . Взагалі,  $\partial\Omega_s = \Gamma_s \cup L_s$ , де через  $\Gamma_s$  позначено ту частину локальної границі підобласті  $\Omega_s$ , яка виходить на глобальну границю  $\Gamma$ , а через  $L_s$  – частину локальної границі підобласті  $\Omega_s$ , що повністю розташована всередині глобальної області  $\Omega$ , і на якій не задано жодних граничних умов, тобто  $\Gamma_s = \partial\Omega_s \cup \Gamma$ ,  $L_s = \partial\Omega_s - \Gamma_s$ . Якщо локальна підобласть  $\Omega_s$  розміщена повністю всередині глобальної області  $\Omega$  і жодна частина її границі  $\partial\Omega_s$  не виходить на глобальну границю  $\Gamma_u$ , тоді інтеграл за  $\Gamma_{su}$  у рівнянні (10) зникає. Оскільки побудова апроксимації пробної функції здійснюватиметься методом найменших квадратів (МНК), для якого точне виконання головних граничних умов – дуже складна задача, то у рівнянні (10) використовують параметр штрафу  $\alpha$ .

Використовуючи формулу Гріна, перетворимо локальну слабку форму (10) до вигляду

$$-\lambda \int_{\Omega_s} \text{gradu} \cdot \text{grad}v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega_s} F v \, d\Omega - \int_{\Omega_s} c\rho u' v \, d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{su}} (u - \tilde{u}) v \, d\Gamma = 0, \quad (11)$$

де  $n$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до границі  $\partial\Omega_s$  області  $\Omega_s$ .

Необхідно зауважити, що рівняння (11) виконується незалежно від розмірів та форми локальної підобласті  $\Omega_s$ . Цей важливий факт є змістовною підставою для вибору найпростішої та найзручнішої геометричної форми для  $\Omega_s$  у вигляді сфери для 3D задач і кола – для 2D задач.

Враховуючи природну граничну умову (3) і співвідношення для скалярних добутків (7)–(9), з (11) отримаємо

$$-a(u, v) + \lambda \int_{L_s} qvd\Gamma + \lambda \int_{\Gamma_{su}} qvd\Gamma + \lambda \int_{\Gamma_{sq}} \tilde{q}vd\Gamma + (F, v) - (c\rho u', v) - \alpha \int_{\Gamma_{su}} (u - \tilde{u})vd\Gamma = 0, \quad (12)$$

$\Gamma_{sq}$  – частина границі  $\partial\Omega_s$  області  $\Omega_s$ , на якій задано природні граничні умови типу (3). Аналогічно, якщо локальна підобласть  $\Omega_s$  розміщена повністю всередині глобальної області  $\Omega$ , тобто границі  $\partial\Omega_s$  і  $\Gamma$  не перетинаються, то  $L_s = \partial\Omega_s$  і, відповідно, контурні інтеграли за  $\Gamma_{sq}$  і  $\Gamma_{su}$  у рівнянні (12) зникають.

Рівняння (12) можна спростити за допомогою відповідного вибору тестових функцій  $v$  так, щоб вони дорівнювали нулю на границі  $L_s$ . Внаслідок вибору геометричної форми локальної підобласті  $\Omega_s$  границя  $L_s$  являє собою або коло (для внутрішніх вузлів), або дугу кола (для вузлів на глобальній границі  $\Gamma$ ). Тоді для цього потрібно як тестові функції взяти вагові функції апроксимації за МНК, про що буде детальніше сказано нижче. Використовуючи такі тестові функції і перегруповуючи члени в рівнянні (12), остаточно отримаємо таку локальну слабку форму вихідної диференціальної початково-крайової задачі теплопровідності (1)–(4)

$$(c\rho u', v) + a(u, v) + \alpha \cdot \langle u, v \rangle_u - \lambda \langle q, v \rangle_q = \lambda \langle \tilde{q}, v \rangle_q + (F, v) + \alpha \cdot \langle \tilde{u}, v \rangle_u, \quad (13)$$

$$(u, v)_{t=0} = (u_0, v). \quad (14)$$

Теоретичне обґрунтування локальної слабкої форми (13)–(14) полягає в такому. Очевидно, що рівняння теплопровідності (1) разом з граничними умовами (2)–(3) виконуються, апостеріорі, для будь-яких локальних підобластей та їхніх границь, відповідно. Теоретично, як тільки об'єднання усіх локальних підобластей покриє всю глобальну область  $\Omega$ , тобто  $\bigcup \Omega_s \supset \Omega$ , рівняння теплопровідності разом з граничними умовами виконуватимуться, апостеріорі, всюди в глобальній області  $\Omega$  та її границі  $\Gamma$ , відповідно. Іншими словами, з локальною слабкою варіаційною постановкою (13)–(14) вихідна задача, яка математично формалізована у вигляді глобальної початково-крайової задачі (1)–(4), зводиться до локалізованої початково-крайової задачі (1)–(4) на локальній підобласті  $\Omega_s$ , яка має форму сфери(кола).

### 3. Схема методу найменших квадратів побудови безсіткової апроксимації пробних функцій

Для побудови дійсно безсіткової напівдискретної апроксимації розв'язку локальної слабкої форми (13)–(14) найчастіше використовується метод найменших квадратів (МНК) [7]. Розглянемо коротко схему МНК, для спрощення викладу якої замість позначення  $u(\mathbf{x}, t)$  будемо застосовувати скорочену форму  $u(\mathbf{x})$ , не забуваючи, що функція  $u$  дійсно залежить і від часової координати  $t$ .

Нехай  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Розглянемо підобласть  $\Omega_x$ , яка є околom т.  $\mathbf{x}$ , і яку будемо розглядати як область визначення апроксимації за МНК пробної функції  $u$  в т.  $\mathbf{x}$ . Апроксимацію МНК  $u^h(\mathbf{x})$  пробної функції  $u$  на множині хаотично розміщених вузлів  $\{\mathbf{x}_i\}, i = 1, \dots, n$  визначимо у матричній формі так:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_x, \quad (15)$$

де  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x}))$  – повна базисна система поліномів порядку  $m$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  – вектор невідомих коефіцієнтів  $a_j(\mathbf{x})$ , які є функціями просторових координат. Наприклад, для 2-D

задач:  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x_1, x_2)$  – лінійний базис при  $m = 3$ ;  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$  – квадратичний базис при  $m = 6$ .

Вектор коефіцієнтів  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  знаходимо з умови мінімуму зваженої дискретної  $L_2$  норми, визначеної як

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_i]^2 = [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}]^T \cdot \mathbf{W} \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}], \quad (16)$$

де  $w_i(\mathbf{x})$  – вагові функції пов'язані з вузлом  $i$ , причому  $w_i(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x}$  з області підтримки  $w_i(\mathbf{x})$ , матриці  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{W}$ , мають, відповідно, вигляд

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \\ \dots \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & w_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

і,  $\hat{\mathbf{u}}^T = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n)$  – вектор фіктивних вузлових значень, тобто значень, які не обов'язково збігаються з вузловими значеннями апроксимації  $u^h(\mathbf{x})$ ,  $\hat{u}_i \neq u^h(\mathbf{x}_i)$ .

Умова стаціонарності  $J(\mathbf{x})$  відносно  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  приводить до такого лінійного співвідношення між  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  і  $\hat{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}, \quad (17)$$

де 
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} = (w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \dots, w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)).$$

Очевидно, що для того, щоб апроксимація за МНК  $u^h(\mathbf{x})$  була визначеною, потрібно, щоб матриця  $\mathbf{A}$  у рівнянні (17) була невинудженою. Як показано у роботі [7], для виконання цієї умови ранг матриці  $\mathbf{P}$  повинен дорівнювати  $m$ , тобто це означає, що для кожної пробної точки  $\mathbf{x} \in \Omega$ , щонайменше  $m$  вагових функцій  $w_i(\mathbf{x})$  мають бути відмінними від нуля, причому всі вузли в  $\Omega_x$  повинні бути розташовані так, щоб вони не утворювали чітких топологічних форм, таких, як, наприклад, пряма лінія.

Розв'язавши рівняння (17) відносно  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  і підставивши розв'язок у співвідношення (15), отримаємо, аналогічно як у класичному МСЕ, вираз для апроксимації  $u^h(\mathbf{x})$  у вигляді інтерполяційної функції:

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x})\hat{u}_i, \quad u^h(\mathbf{x}_i) \equiv u_i \neq \hat{u}_i \quad \mathbf{x} \in \Omega_x, \quad (18)$$

де

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \text{ або } \varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji}. \quad (19)$$

Функції  $\varphi_i(\mathbf{x})$  називають функціями форми апроксимації за МНК. Очевидно, що  $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$ , якщо  $w_i(\mathbf{x}) = 0$ . На практиці вагові функції  $w_i(\mathbf{x})$  вибирають так, щоб вони були відмінні від нуля лише в так званій області підтримки вузлової точки  $\mathbf{x}_i \in \Omega$ , яка є кругом радіуса  $r_i$  з центром у цій пробній точці. Той факт, що  $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$  для всіх точок поза межами області підтримки пробної

точки забезпечує локальний характер апроксимації за МНК (тобто у цьому аспекті можна стверджувати, що функції форми  $\varphi_i(\mathbf{x})$  мають скінченний носій, аналогічно, як і базисні функції у класичному МСЕ).

Гладкість функцій форм  $\varphi_i(\mathbf{x})$  визначається гладкістю базисних функцій  $p_j(\mathbf{x})$  та вагових функцій  $w_i(\mathbf{x})$ . Так, якщо  $w_i(\mathbf{x}) \in C^k(\Omega)$  і  $p_j(\mathbf{x}) \in C^l(\Omega)$ , то  $\varphi_i(\mathbf{x}) \in C^r(\Omega)$ , де  $r = \min(k, l)$ . Для практичної реалізації апроксимації за МНК необхідно, насамперед, вибрати вигляд вагових функцій  $w_i(\mathbf{x})$ . У цій роботі за вагові функції вибираються сплайн-функції з компактним носієм вигляду

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4, & 0 \leq d_i \leq r_i, \\ 0, & d_i > r_i \end{cases}, \quad (20)$$

де  $d_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$  – відстань від вузла  $\mathbf{x}_i$  до пробної точки  $\mathbf{x}$ ,  $r_i$  – радіус області підтримки вузла  $\mathbf{x}_i$ . Легко зрозуміти, що вагові функції сплайнового типу (20) мають гладкість класу  $C^1(\Omega)$ , і, відповідно, функції форм  $\varphi_i(\mathbf{x})$  є також  $C^1$ -неперервними всюди в області  $\Omega$ .

#### 4. Дискретизована система рівнянь

Отже, напівдискретна апроксимація розв'язку  $u$  локальної слабкої форми (13)–(14) будується у вигляді (18), причому функції форм  $\varphi_i(\mathbf{x})$  визначаються через базисні  $p_j(\mathbf{x})$  та вагові функції  $w_i(\mathbf{x})$  методу найменших квадратів згідно із співвідношенням (19). Зауважимо, що пробна функція  $u$  у кожній локальній підобласті  $\Omega_s$  визначається фіктивними вузловими значеннями  $\hat{u}_i$  в області визначення для  $\forall \mathbf{x} \in \Omega_s$ . Кожна точка спостереження, тобто одна локальна підобласть  $\Omega_s$  дає одне дискретизоване рівняння, яке зв'язує усі фіктивні вузлові значення  $\hat{u}_i$ . Отже, для отримання замкненої системи дискретизованих рівнянь потрібно вибрати стільки локальних підобластей  $\Omega_s$ , скільки є невідомих  $\hat{u}_i$ .

Оскільки співвідношення (18) визначають лише напівдискретну апроксимацію невідомої функції  $u$  (тобто апроксимацію, дискретизовану лише за просторовими координатами) і вихідна диференціальна задача теплопровідності розглядається у лінійній постановці, то результуюча система дискретизованих рівнянь буде мати вигляд системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яка в матричній формі матиме вигляд

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{U}}'(t) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{R}(t) \quad (21)$$

з початковою умовою

$$\hat{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{U}_0. \quad (22)$$

Для того, щоб отримати вирази для коефіцієнтів матриці мас  $\mathbf{M}$ , матриці жорсткості  $\mathbf{K}$  та вектора навантажень  $\mathbf{F}$ , підставимо розклад (18) у рівняння (13) локальної слабкої форми. Після нескладних перетворень одержимо

$$M_{ij} = (c\rho\varphi_j(\mathbf{x}), w_i(\mathbf{x})) = \int_{\Omega_s} c\rho\varphi_j(\mathbf{x})w_i(\mathbf{x})d\Omega, \quad (23)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega_s} \lambda \cdot \text{grad}\varphi_j(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} w_i(\mathbf{x})d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \varphi_j(\mathbf{x}) \cdot w_i(\mathbf{x})d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma_{sq}} \frac{\partial\varphi_j(\mathbf{x})}{\partial n} \cdot w_i(\mathbf{x})d\Gamma, \quad (24)$$

$$R_i = \int_{\Omega_s} F w_i(\mathbf{x})d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \tilde{u}(\mathbf{x}) \cdot w_i(\mathbf{x})d\Gamma + \lambda \int_{\Gamma_{sq}} q \cdot w_i(\mathbf{x})d\Gamma. \quad (25)$$

Тут як тестові функції  $v$  використано вагові функції  $w_i(\mathbf{x})$  апроксимації за МНК.

Тоді алгоритм реалізації запропонованого безсіткового методу можна сформулювати так :

1. Вибираємо скінченну кількість вузлових точок у заданій області  $\Omega$  та на її границі  $\Gamma$ .
2. Для кожної вузлової точки визначаємо локальну підобласть  $\Omega_s$  з границею  $\partial\Omega_s$ .
3. Створюємо цикл за всіма вузловими точками, в якому:
  - a. Вибираємо множину довільно розташованих точок  $\mathbf{x}_q$  в  $\Omega_s$  та на границі  $\partial\Omega_s$ .
  - b. Організуємо цикл за точками  $\mathbf{x}_q$ , в якому:
    - i. визначаємо область визначення апроксимації за МНК пробної функції в т.  $\mathbf{x}_q$ , тобто набір точок  $\mathbf{x}_i$  для яких  $w_i(\mathbf{x}_q) > 0$ ;
    - ii. У кожній точці  $\mathbf{x}_i$  обчислюємо функцію форми  $\varphi_i(\mathbf{x}_q)$  та всі її необхідні похідні;
    - iii. Обчислюємо коефіцієнти локальних матриць мас, жорсткості та локального вектора навантажень за формулами (22)–(24).
    - iv. Асемблюємо внески локальних матриць для точки  $\mathbf{x}_q$  в глобальні матриці мас  $\mathbf{M}$ , жорсткості  $\mathbf{K}$  та вектор навантажень  $\mathbf{R}$ .
  - c. завершуємо цикл за точками  $\mathbf{x}_q$
4. Закінчуємо цикл за вузловими точками.
5. Розв'язуємо задачу Коші (21)–(22).

Із наведеного алгоритму легко бачити, що запропонований підхід є дійсно безсітковим, оскільки він не потребує поділу вихідної області на скінченні елементи ні для інтерполяції, ні для інтегрування.

## 5. Висновки

У цій роботі запропоновано новий безсітковий метод розв'язання нестационарних задач теплопровідності. Основою і новизною цього методу є побудована локальна варіаційна слабка форма, яка дає змогу, по-перше, позбутися необхідності просторової дискретизації області для інтегрування, по-друге, зберегти локальний характер апроксимації пробної функції. Для забезпечення безсіткового характеру напівдискретної апроксимації розв'язку локальної слабкої форми запропоновано схему методу найменших квадратів, яка, своєю чергою, дає змогу позбутися необхідності просторової дискретизації області для побудови інтерполяції невідомої функції. Отже, на відміну від інших, так званих, безсіткових методів, які все ж вимагають побудови деякої початкової сітки скінченних елементів для інтегрування слабкої форми, запропонований метод не потребує жодних елементів розбиття (ні скінченних, ні граничних), тобто він є повністю безсітковим. В цьому і полягає його новизна та перевага.

1. Atluri S.N., Shen S. *The Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple and less-costly alternative to the finite element and boundary element method* // *Comput. Modeling Engrg. Sci.* – Vol.3. – No.1. – 2002. – P.11–51. 2. Nayroles B., Touzot G., Villon P. *Generalized the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements* // *Comput. Mech.* – Vol. 10. – 1992. – P.307–318. 3. Belytschko T., Lu Y., Gu L. *Element-free Galerkin methods* // *Int. J. Num. Meth. Engrg.* – Vol. 37. – 1994. – P. 229–256. 4. Babushka I., Melenk J. *The partition of unity method* // *Int. J. Num. Meth. Engrg.* – Vol. 40. – 1997. – P.727–758. 5. Sukumar N., Moran B., Belytschko T. *The natural element method in solid mechanics* // *Int. J. Num. Meth. Engrg.* – Vol. – 43. – 1998. – P.839–887. 6. Wendland H. *Meshless Galerkin methods using radial basis function* // *Math. Comput.* – Vol. 68(228). – 1999. – P.1521–1531. 7. Atluri S.N., Zhu T.L. *The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics* // *Comput. Mech.* – Vol.25. – 2000. – P. 169–179. 8. Atluri S.N., Zhu T.L. *Mew concepts in meshless methods* // *Int. J. Num. Meth. Engrg.* – Vol. 47. – 2000. – P.537–556. 9. Atluri S.N., Shen S. *The Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method* // *Tech. Science Press, Los Angeles, CA, 2002.* 10. Лыков А.В. *Теория теплопроводности.* – М., 1967. 11. Зенкевич О., Морган К. *Конечные элементы и аппроксимации.* – М., 1986.