розкрою, встановлення строгої орієнтації заготівлі і матеріалу, різні температурні або амортизаційні характеристики. Одним з підходів для вибору або розроблення алгоритмів, які б розв'язували задачі такого типу, є урахування цих умов, як додаткових просторових вимірів. Тоді, наприклад, задача лінійного розкрою з урахуванням якості заготівлі в кожній точці буде зведена до задачі двовимірного розкрою з певними обмеженнями. Такий підхід відкриває нам практично недосліджений клас задач багатовимірного розкрою. Розроблення методів і алгоритмів для цього класу задач може знайти застосування не тільки у виробництві, але й розв'язання у плануванні проектів, дослідженнях і аналізі різного роду проблем.

1. Грицишин Я., Лобур М., Ткаченко С., Чура И. Особенности разработки САПР раскроя материалов // IEEE AIS'02 CAD-2002. – P. 404–409, Sept. 2002. 2. Ткаченко С., Чура І., Грицишин Я. Оптимізація розміщення плоских об'єктів на площині довільної форми // Вісник НУ "Львівська політехніка". – №444. – P.134–136, 2002. 3. Tkachenko S., Chura I., Hrytsyshyn Y., Karkulyovsky V. The placement of optional form objects on the optional platform // CADSM'2003. – P. 417–420, Feb. 2003. 4. Hrytsyshyn Y., Tkachenko S. Web-oriented CAD system for material cutting // CADSM'05, Feb.2003.

УДК 621.382.002

І.І. Мотика, Л.А. Недоступ*, Н.І. Нестор**

Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра систем автоматизованого проектування,
*кафедра теоретичної радіотехніки та радіовимірювань,
**Технічний коледж національного університету "Львівська політехніка"

СТАНДАРТНИЙ РОЗПОДІЛ ІМОВІРНОСТЕЙ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПОХИБОК ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Для аналізу похибок технологічних процесів пропонується використовувати стандартну ступінчасту функцію розподілу густини імовірностей. Одержано вирази для характеристичних функцій таких розподілів у одно- і багатовимірному випадках. Розв'язана обернена задача – отримання параметрів одно- і багатовимірних ступінчастих функцій густини розподілу імовірностей за відомою характеристичною функцією. Отримані результати дають можливість органічно поєднати аналітичні та числові методи у аналізі похибок технологічних процесів.

For the analysis of errors of technological processes it is suggested to use built-in step function of probabilities density division. Expressions are received for the characteristic functions of such divisions for one- and multidimensional cases. The reverse task is solved – receiving of parameters of one- and multidimensional steps functions of probabilities density division on the known characteristic function. The received results enable organically connecting analytical and numerical methods while analysing errors of technological processes.

Постановка проблеми

Аналіз похибок технологічних процесів із застосуванням характеристичних функцій, як будь-які методи інтегральних перетворень, є ефективним, якщо остаточний результат вдається отримати в аналітичній формі. Для послідовних ланок обробних операцій такі перетворення можна здійснити порівняно просто [1]. Однак операції розділення за певними ознаками призводять до необхідності виконувати неодноразово пряме та обернене перетворення Фур'є функцій розподілу імовірностей, які в аналітичній формі виконати не вдається. Такими є, наприклад, моделі пооопераційного контролю [2].

Наближені числові методи перетворень, включаючи швидке перетворення Фур'є, можуть призводити до порушення властивості нормованості функцій розподілу імовірностей, що під час багаторазових перетворень може призвести до непередбачуваних наслідків, наприклад, отримати імовірність виходу придатних виробів, більшу від одиниці. Тому під час кожного перетворення бажано перевіряти і відновлювати умову нормування, для чого потрібне щонайменше ще одне інтегрування густини розподілу. Одним із можливих варіантів подолання цієї проблеми є заміна всього різномаїття розподілів, які виникають під час аналізу похибок, одним стандартним розподілом, для якого можна розробити прості і ефективні алгоритми прямого та оберненого перетворення Фур'є.

В цій роботі ми пропонуємо використовувати як стандартну ступінчасту функцію густини розподілу імовірностей. Ступінчаста густина розподілу імовірностей, яка відповідає кусково-лінійному інтегральному розподілу, є зручною і простою апроксимацією для густин складної форми. Крім того, ступінчаста густина використовується для подання в моделі вхідних даних у вигляді експериментально знятих гістограм. Далі ми отримаємо вирази для характеристичних функцій такого розподілу в одно- і багатовимірному випадках, а також наведемо розв'язання оберненої задачі – за заданою характеристичною функцією знайти параметри стандартної функції густини розподілу.

Характеристична функція стандартного розподілу випадкової величини

Ступінчаста густина розподілу випадкової величини наведена на рис. 1.

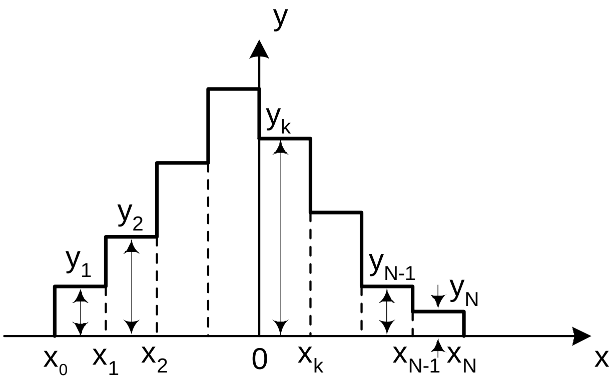

Рис. 1. Ступінчаста функція густини розподілу

Крок за координатою x приймаємо рівномірним і таким, що дорівнює h. Тоді $x_k = x_0 + hk$. (k=1,2…,N). Якщо ця функція густини розподілу f(x), то значення ординат стандартної функції визначають так:

$$y_0 = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx, \quad y_k = \frac{1}{h}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx, \quad y_N = \frac{1}{h}\int_{x_{N-1}}^{\infty} f(x)\,dx . \tag{1}$$

Характеристична функція для цього розподілу визначається із таких співвідношень:

$$g_{\text{ст}}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \sum_{k=1}^{N} y_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-i\lambda x}dx = \frac{i}{\lambda}\sum_{k=1}^{N} y_k \left(e^{-i\lambda x_k} - e^{-i\lambda x_{k-1}}\right). \tag{2}$$

Характеристична функція стандартного розподілу випадкового вектора

За аналогією із одновимірним випадком введемо стандартну функцію густини розподілу випадкового n-вимірного вектора. Крок за координатами приймемо однаковим і таким, що дорівнює h. Введемо позначення:

$x_1,\ldots,x_n$ – координати простору випадкових змінних; N_j – кількість дискретів за координатою x_j; $x_{0_1},\ldots,x_{0_n}$ – початкові координати функції густини розподілу;

$x_{k_j} = x_{0_j} + k_j h, \quad (k_j = 0,\ldots,N_j)$; $y_{k_1 \ldots k_n}$ – висота елемента функції густини розподілу із координатами кутка $x_{k_1},\ldots x_{k_n}$.

Характеристична функція визначається із виразів:

$$g_{\text{ст}}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)} f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} y_{k_1 \ldots k_n} \int_{x_{k_1-1}}^{x_{k_1}} \cdots \int_{x_{k_n-1}}^{x_{k_n}} e^{i(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} y_{k_1 \ldots k_n} \int_{x_{k_1-1}}^{x_{k_1}} \cdots \int_{x_{k_n-1}}^{x_{k_n}} e^{i\lambda_1 x_1} \times \cdots \times e^{i\lambda_n x_n} dx_1 \cdots dx_n \qquad (3)$$

Застосовуючи повторне інтегрування, отримаємо:

$$g_{\text{ст}}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = (-i)^n \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} y_{k_1 \ldots k_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \left(e^{i\lambda_j x_{k_j}} - e^{i\lambda_j x_{k_j - 1}}\right) \qquad (4)$$

Обчислення параметрів стандартної функції за заданою характеристичною

Нехай задана характеристична функція $g(\lambda)$. Визначимо параметри стандартної функції $f_{\text{ст}}(x)$. Для цього скористаємося властивістю, що коли випадкова величина X має скінченні моменти до порядку m включно, то характеристична функція може бути виражена рядом Маклорена:

$$g(\lambda) = 1 + \sum_{r=1}^{m} \frac{i^r \alpha_r}{r!} \lambda^r + R_m \qquad (5)$$

Прирівнюючи члени при однакових степенях λ у рядах стандартної і характеристичної функцій, отримаємо потрібну кількість рівнянь для обчислення параметрів стандартної функції.

Попередньо виберемо значення h, N, x_0. Знайдемо початкові моменти стандартної функції розподілу:

$$\alpha_{\text{ст}\, r} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_c(x) dx = \sum_{k=1}^{N} y_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} x^r dx = \sum_{k=1}^{N} \frac{y_k}{r+1}\left(x_k^{r+1} - x_{k-1}^{r+1}\right) \qquad (6)$$

Моменти випадкової величини визначають через її характеристичну функцію за формулою [3]:

$$\alpha_r = i^{-r} \left[\frac{d^r}{d\lambda^r} g(\lambda) \right]_{\lambda=0} \qquad (7)$$

Далі прирівняємо моменти до (N-1)-го порядків стандартної та характеристичної функцій, долучимо умову нормування густини розподілу і отримаємо систему N лінійних рівнянь для обчислення значень y_k:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} \frac{y_k}{r+1}\left(x_k^{r+1} - x_{k-1}^{r+1}\right) = i^{-r} \left[\frac{d^r}{d\lambda^r} g(\lambda) \right]_{\lambda=0}, \quad r = 1,2,\ldots,N-1. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h \sum_{k=1}^{N} y_k = 1, \end{cases} \qquad (8)$$

За аналогією одержимо систтему рівнянь для обчислення параметрів багатовимірної стандартної функції розподілу $f_{ст}(x_1, x_2, ..., x_n)$ за заданою характеристичною $g(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Виберемо значення h, $x_{0_1}, ..., x_{0_n}$, $N_j, (j = 1,2,...,n)$. Початкові моменти стандартної функції розподілу визначають за формулами:

$$\alpha_{ст\,\eta_1...\eta_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \bullet\bullet\bullet \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\eta_1} \bullet\bullet\bullet x_n^{\eta_n} f_{ст}(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n =$$
$$= \sum_{k_1=1}^{N_1} \bullet\bullet\bullet \sum_{k_n=1}^{N_n} y_{k_1.....k_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\eta_j + 1} \left(x_j^{\eta_j} - x_j^{\eta_j + 1} \right). \tag{9}$$

Вираз для моментів випадкового вектора через його характеристичну фукцію має вигляд [3]:

$$\alpha_{\eta_1.....\eta_n} = i^{-\nu} \left[\frac{\partial^{\nu} g(\lambda_1, ..., \lambda_n)}{\partial \lambda_1^{\eta_1} ..... \partial \lambda_n^{\eta_n}} \right]_{\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0} \qquad (\eta_1 + ... + \eta_n = \nu). \tag{10}$$

Стандартна функція густини розподілу має $N = N_1 \times ..... \times N_n$ невідомих значень $y_{k_1.....k_n}$. Прирівнюючи $N - 1$ моментів стандартної функції до моментів, отриманих з виразу (10), і долучаючи рівняння нормування густини розподілу, одержимо систему рівнянь для обчислення значень $y_{k_1.....k_n}$:

$$\begin{cases} \sum_{k_1=1}^{N_1} \bullet\bullet\bullet \sum_{k_n=1}^{N_n} y_{k_1.....k_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\eta_j + 1} \left(x_j^{\eta_j} - x_j^{\eta_j + 1} \right) = \\ = i^{-\nu} \left[\frac{\partial^{\nu} g(\lambda_1, ..., \lambda_n)}{\partial \lambda_1^{\eta_1} ..... \partial \lambda_n^{\eta_n}} \right]_{\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0} \qquad (\eta_1 + ... + \eta_n = \nu) \\ .... \\ h^n \sum_{k_1=1}^{N_1 - 1} \bullet\bullet\bullet \sum_{k_n=1}^{N_n - 1} y_{k_1.....k_n} \ . \end{cases} \tag{11}$$

Висновки

Запропонований аналітико-числовий метод дає змогу подолати труднощі, які виникають за необхідності багаторазового прямого і оберненого перетворення Фур'є. Метод гарантує виконання умови нормованості функцій розподілу випадкових векторів. Наведені способи використання стандартних фунцій розподілу розширюють можливості застосування характеристичних функцій для аналізу похибок технологічних процесів.

1. Мотика І.І., Нестор Н.І. Аналіз похибок технологічних операцій з використанням характеристичних функцій // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – № 327. – С. 100–110. 2. Мотика І.І., Нестор Н.І. Моделі операцій контролю для аналізу точності технологічних процесів // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 2002. – № 444. – С. 57-60. 3. Пугачев В.С. Теория случайных функций. – М., 1960.