МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ ПРОЕКТУВАННЯ

УДК 004.942, 004.852

П.О. Кравець
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційних систем та мереж

ІГРОВІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗПОДІЛЕНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто ігрові методи розв’язування задач, які описуються системами стохастичних рівнянь у часткових похідних. Запропоновані методи ґрунтуються на оцінці характеристик розподілів випадкових величин, яка здійснюється за допомогою самонавчальних рекурентних методів.

The game problems solution methods which are described by systems of the stochastic equations in partial derivatives are considered. The offered methods are based on an estimation of the characteristics of stochastic processes distributions, which are realized on the base of self-learning recurrent methods.

Вступ

Для розв’язування задач мікроелектроніки, механіки, аеродинаміки та інших галузей знань використовують моделі просторово-розподілених процесів у вигляді систем дифрівнянь у часткових похідних, заданих в обмеженій області з граничними та початковими умовами. Більшість із таких задач мають детерміноване формулювання. Однак в реальних умовах динаміка процесів значною мірою визначається дією некерованих випадкових факторів, які можуть змінювати фізичні властивості матеріалів та конструкцій пристроїв. У зв’язку з цим на етапі проектування необхідно враховувати вплив випадкових факторів на режими функціонування системи, використовуючи імовірнісні методи аналізу [1, 2].

Розв’язки стохастичних крайових задач визначаються густиною (або інтегральною функцією) розподілу випадкових величин, для оцінювання якої використовують два основні класи методів – параметричний та непараметричний. Параметричні методи використовуються, коли густина розподілу випадкової величини містить невідомі параметри. У такому разі процедура її оцінювання зводиться до визначення цих невідомих параметрів. Непараметричні методи використовують, коли апріорна інформація про густину розподілу відсутня. До таких методів належать [3]: оцінювання густини за допомогою ядер; оцінювання Розенблата; наближення рядами; оцінювання за методом найближчого сусіда; метод гістограм; емпіричне байєсівське оцінювання.

Емпіричні оцінювання густини (або функції імовірності для дискретних випадкових величин) в умовах невизначеності ґрунтуються на методі статистичних випробувань Монте–Карло, який передбачає імітацію реальних процесів за допомогою випадкового вибору одного з усіх можливих станів системи. Щоб отримати достатню для адекватного визначення густини розподілу інформацію, при розв’язуванні інженерних задач необхідно виконати тисячі дослідів, що потребує значних затрат машинного часу для реалізації експерименту на сучасних однопроцесорних комп'ютерних системах. Збільшення затрат машинного часу особливо відчутнє у разі зростання розмірності задачі. Тому методи розв'язування стохастичних крайових задач, як правило, реалізуються на мультипроцесорних системах і зводяться до різноманітних модифікацій методу Монте-Карло. Щоб зменшити час комп'ютерних випробувань, для оцінювання характеристик випадкових величин ми запропонували використання адаптивних ігрових методів.

Мета роботи

Метою роботи є проектування та дослідження ефективності ігрових методів оптимізації розподілених стохастичних систем, математичні моделі яких задають системами диференційних рівнянь у часткових похідних з випадковими параметрами з апріорі невідомими стохастичними характеристиками. Для досягнення мети необхідно розв'язати такі задачі: 1) виконати математичне формулювання базової крайової задачі та стохастичної гри для її розв'язування; 2) розробити ігрові методи розв'язування сформульованої задачі та дослідити їхню ефективність аналітичними або експериментальними методами; 3) виробити рекомендації щодо практичного використання розроблених ігрових методів.

Формулювання ігрової задачі

Узагальнена математична модель стохастичної системи з розподіленими параметрами задана рівнянням:

$$\mathcal{L}\{\chi\} = \mu\,, \tag{1}$$

де $\mathcal{L}$ – векторний диференційний оператор у часткових похідних; χ – невідома випадкова функція, визначена в області D з граничними умовами $\chi_{\tilde{a}}$ на межі Γ розділення середовищ; μ – вектор джерел випадкових величин з обмеженою дисперсією, заданий в області D та (або) на її межі Γ. Динаміка функції χ всередині області D визначається видом оператора $\mathcal{L}$, стохастичними характеристиками джерел μ та видом граничних умов $\chi_г$.

Найчастіше в літературі розглядають методи розв'язування стохастичних крайових задач з довільним лінійним диференційним оператором $\mathcal{L}$, джерелами випадковостей μ та граничними умовами $\chi_{\tilde{a}}$ з відомими стохастичними характеристиками [1, 2]. У такому разі середнє значення для χ може бути знайдене в результаті розв'язування граничної задачі $\mathcal{L}\{x\} = \eta$ з крайовими умовами $x_{\tilde{a}}$, де $x = M\{\chi\}$, $\eta = M\{\mu\}$, $x_{\tilde{a}} = M\{\chi_{\tilde{a}}\}$, M – символ математичного сподівання.

У разі апріорної невизначеності випадкових величин для розв'язування стохастичної крайової задачі необхідно виконати оцінювання характеристик випадкових величин за їхніми спостереженнями. Оскільки випадковий процес може бути заданий системою умовних розподілів, то для розв'язування задачі (1) необхідне оцінювання таких розподілів.

У загальному випадку стохастичні функції не дають змоги виконати їхнє диференціювання. Тому замість оператора $\mathcal{L}$ будемо розглядати його скінченно-різницеву апроксимацію $L^{\#}$ і говорити про розв'язування стохастичної скінченно-різницевої задачі в області D. З урахуванням локальності оператора $L^{\#}$, замість неперервних в області $D \cup \Gamma$ функцій χ, будемо розглядати скінченну множину функцій χ_n^i, спостереження за якими ведеться в дискретні моменти часу n=1,2,... . Крім того, обмежимося класом однорідних процесів з незалежними значеннями (марківськими процесами), для визначення яких достатньо оцінити їхні функції розподілів.

Будемо виходити з того, що $\chi_n^i \in R^1$, $M\{(\chi_n^i)^2\} < \infty$, $\forall i \in D$, $\forall n \geq 1$. Тоді для кожного процесу χ_n^i можна вказати інтервал його допустимих значень $[\chi_{min}^i, \chi_{max}^i]$, де $\chi_{min}^i = \inf\limits_n \chi_n^i$, $\chi_{max}^i = \sup\limits_n \chi_n^i$. Якщо $\chi_n^i \in R^m$, $m > 1$, такі інтервали задають для кожного процесу.

У вузлах області скінченно-різницевої апроксимації розмістимо активні елементи – гравців, які в ході колективної гри формуватимуть поточні наближення до оптимального розв'язку. Для цього інтервали $[\chi_{min}^i, \chi_{max}^i]$ $\forall i \in D$ розділимо на N_i рівних частин $h_i = (\chi_{max}^i - \chi_{min}^i)/N_i$, які визначать чисті стратегії гравців у вигляді набору підінтервалів $h_i(k) = [\chi_{min}^i + (k-1) * h_i$, $\chi_{min}^i + k * h_i]$, $k = \overline{1, N_i}$. Нехай чисті стратегії гравці вибирають у дискретні моменти часу n=1,2,...

з умовними імовірностями: $p_n^i(k) = P\{\chi_n^i \in h_i(k) \mid \chi_t^i, t = \overline{1, n-1}\}$, $\sum_{k=1}^{N_i} p_n^i(k) = 1$, які приймемо за змішані стратегії гравців. Після закінчення вибору чистих стратегій усіма гравцями, кожен з них спостерігає випадкову величину

$$\xi_n^i(X^{D_i}) = \left| L^{\#}\{\chi_n^i\} - \mu_n^i \right|, \tag{2}$$

де $X^{D_i} = \prod_{j \in D_i} X^j$, $X^i = \left(h_i(k) \mid k = 1, N_i\right)$. Значення (2) обчислюють на локальній підмножині випадкових процесів $\{\chi_n^j \mid j \in D_i \subset D\}$, воно визначає поточний програш гравця або якість поточного варіанта розв'язку, вибраного в момент часу n $\forall i \in D$. З припущень невиродженості оператора $L^{\#}$ та обмеженості другого моменту випадкових величин χ_n^i та μ_n^i випливає, що $M\{(\xi_n^i)^2\} < \infty$.

Після поточного програшу кожен гравець перераховує елементи власного вектора змішаних стратегій. Щоб забезпечити селективний вибір оптимальних розв'язків $\chi_n^i(k) \in h_i(k)$, меншим значенням поточних втрат $\xi_n^i(k)$ повинні відповідати більші значення умовних імовірностей $p_n^i(k)$.

Розв'язування стохастичної крайової задачі зводиться до формування таких послідовностей $\{p_n^i\}$ $\forall i \in D$, щоб з імовірністю 1 виконувалась система цілей:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \xi_t^i \to \min. \tag{3}$$

На практиці момент закінчення гри можна визначити з умови досягнення середньої точності розв'язків задачі:

$$\Phi_n = \frac{1}{n\,|D|} \sum_{t=1}^{n} \sum_{i \in D} \xi_t^i \le \varepsilon, \tag{4}$$

де $|D|$ – кількість вузлів скінченно-різницевої апроксимації; $\varepsilon > 0$ – точність розв'язку задачі.

Фінальний розподіл $p^{i\,*}$ визначає розв'язок стохастичної крайової задачі:

$$\chi^i = \sum_{j=1}^{N_i} p^{i\,*}(j) \Delta\overline{\chi}^i(j) \quad \forall i \in D, \tag{5}$$

де $\Delta\overline{\chi}^i(j)$ – середина підінтервалу $h_i(j)$.

Замість (5) як розв'язок можна прийняти підінтервал $h_i(k)$, номер якого $k = \arg\max_j p^{i\,*}(j)$, відповідає максимальному значенню імовірності, оскільки це значення дає найбільший внесок у математичне сподівання. Тому замість оцінювання густини будемо оцінювати моду розподілу під час розгортання випадкового процесу.

Адаптивні ігрові методи

Виконання векторної умови (3) забезпечується відповідною зміною змішаних стратегій гравців. Процедуру формування змішаних стратегій у часі будемо шукати у класі рекурентних методів

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}\{p_n^i - \gamma_n R(\chi_n^i, p_n^i, \xi_n^i)\}, \tag{6}$$

де γ_n – параметр, що регулює крок методу; $R(x_n^i, p_n^i, \xi_n^i)$ – вектор руху методу; $\pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}$ – проектор на ε-симплекс [4].

Розв'язки ігрової задачі шукають у множині точок рівноваги за Нешем

$$\forall i \in D \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\Phi_n^i(\{\chi_n^{D_i}\}) - \Phi_n^i(\{\hat{\chi}_n^{D_i}\})\right] \le 0\,, \tag{7}$$

де нерівність (7) виконується з імовірністю 1, а $\chi_n^{D_i}, \tilde{\chi}_n^{D_i} \in X^{D_i}$; $\hat{\chi}_n^{D_i} = \chi_n^{D_i} \setminus \chi_n^i + \tilde{\chi}_n^i \in X^{D_i}$; $\chi_n^i, \tilde{\chi}_n^i \in X^i$.

Для побудови методу (6) з потрібними властивостями розглядають матричне формулювання асимптотично адекватної безкоаліційної ігрової задачі. Для цього будемо вважати, що математичні сподівання випадкових втрат $M\{\xi_n^i\} = v^i = const$ відомі. Тоді функції середніх втрат гравців визначають так:

$$V^i = \sum_{\chi^{D_i} \in X^{D_i}} v^i(\chi^{D_i}) \prod_{j\in D_i;\chi^j \in \chi^{D_i}} p^j(\chi^j)\,.$$

Для диференційованих на одиничному симлексі функцій V^i оптимальні змішані стратегії можна визначити з умови доповняльної нежорсткості [5]

$$\nabla_{p^i} V^i = V^i e^{N_i}\,,\ p^i \in S^{N_i}\,, \forall i \in D\,, \tag{8}$$

де $\nabla_{p^i} V^i$ – градієнт функції V^i; e^{N_i} – вектор, що складається з N_i одиниць.

На підставі умови доповняльної нежорсткості (8) методом стохастичної апроксимації [6] отримаємо марківський рекурентний метод:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}\left\{p_n^i + \gamma_n \xi_n^i\left(g e^{N_i} - \frac{e(\chi_n^i)}{e^{\grave{o}}(\chi_n^i) p_n^i}\right)\right\}, \tag{9}$$

де $g \in \{0,1\}$; $e(\chi_n^i)$ – одиничний вектор-індикатор вибору варіанта $\chi_n^i \in e^{\grave{o}}(u_n^i)X^i$. Якщо $g = 0$, з (9) одержимо градієнтний метод.

Виконаємо покомпонентне зважування векторів (8)

$$W^i = diag(p_n^i)(e^{N_i} V_n^i - \nabla_{p^i} V_n^i)\,, \tag{10}$$

де $W^i \in R^{N_i}$; $diag(p_n^i)$ – квадратна діагональна матриця порядку N_i, складена з елементів вектора p_n^i. Застосувавши до (10) метод стохастичної апроксимації, отримаємо інший рекурентний метод:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}\left\{p_n^i - \gamma_n \xi_n^i\left[e(\chi_n^i) - p_n^i\right]\right\}, \tag{11}$$

який дає змогу врахувати розв'язки ігрової задачі у неповністю змішаних стратегіях, що розміщені на межі одиничного симплексу. Якщо $\gamma_n \zeta_n^i \in [0,1]$, з (11) одержимо безпроекційний рекурентний метод.

На кожному кроці повторювальної гри замість рівноімовірного вибору значень з інтервалів $[\chi_{min}^i, \chi_{max}^i]$ побудуємо генератор випадкових величин за законом, який визначається рекурентними процедурами (9) або (11). Враховуючи те, що ці процедури нагромаджують інформації про сприятливі для цього експерименту випробування, вони забезпечать частіший вибір тих підінтервалів, які в середньому мінімізують похибку системи скінченно-різницевих рівнянь. У зв'язку з цим запропоновані рекурентні методи реалізують концепцію самонавчального (адаптивного) оцінювання моди густини розподілу випадкових величин і за певних умов початкової ініціалізації приводять до зменшення часу розв'язування задачі порівняно з методом Монте-Карло.

Ініціалізація ігрового методу визначається із умов його збіжності. Достатні умови збіжності ігрових методів (9) та (11) до асимптотично оптимальних розв'язків отримують на підставі верхніх оцінок умовного математичного сподівання поточної похибки $\Delta_n = \sum_{i \in D} \left\| W^i \right\|^2$, виконання умови доповняльної нежорсткості при фіксованій передісторії подій, наслідків теореми Робінса–Сігмунда та результатів теорем про рекурентні числові нерівності [7].

Оцінити асимптотичний порядок швидкості збіжності можна для послідовностей величин $\gamma_n = \gamma n^{-\alpha}$; $\varepsilon_n = \varepsilon n^{-\beta}$; $\gamma, \varepsilon, \alpha, \beta > 0$ методом моментів Чжуна:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, n^{\theta} M\{\Delta_n\} \le \vartheta ,$$

де θ – параметр порядку, ϑ – швидкість збіжності. Більшому θ та меншому ϑ відповідає більша швидкість збіжності ігрового методу.

Ігрові методи (9) та (11) здійснюють формування послідовності чистих стратегій методом проб та помилок, що загалом пояснює їхню невисоку (степеневу) швидкість збіжності.

Результати моделювання

Для прикладу виконаємо ігрову мінімізацію нев’язки стохастичого варіанта задачі Пуассона

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \delta$$

у прямокутній області $[x_{min}, x_{max}]*[y_{min}, y_{max}]$ з крайовими умовами:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \text{ для } x = x_{min} \text{ і } x = x_{max};$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = 0 \text{ для } y = y_{min};$$

$$\chi = \chi_{\tilde{a}} \text{ для } y = y_{max},$$

де $\chi_г \sim \text{Normal}(m, d)$ – нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням m і обмеженою дисперсією d; $\chi, \delta \in R^1$; $x, y \in R^1_+$.

Розв’язок крайової задачі отримано усередненням у часі поточних значень шуканої функції

$$\overline{\chi} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \chi[t], \; n = 1, 2, \ldots$$

для таких значень параметрів: $x_{min} = y_{min} = 0$, $x_{max} = 4$, $y_{max} = 6$, $\chi_{min} = 0$, $\chi_{max} = 2$, $N_i = 16$, $m = 0$, $d \in \{0; 1; 10; 100\}$, $n_{max} = 10^4$. Початкове наближення функції χ прийнято випадковим з інтервалу $[\chi_{min}, \chi_{max}]$. Конфігурація сітки вибрана регулярною, з рівномірним кроком. Мінімізація похибки розв’язування задачі виконана за допомогою ігрового рекурентного методу (11) з параметрами $\gamma = 1, \varepsilon = 0.999 N_i^{-1}, \alpha = 0.3, \beta = 1$.

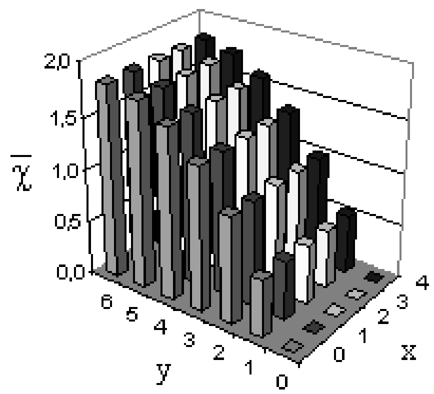

Рис. 1. Розв’язок крайової задачі

Загальний розв’язок крайової задачі для значень параметрів $d = 0$, $\delta = -0.1$ подано на рис. 1 у вигляді діаграми.

На рис. 2 показано зміну функції середньої похибки розв’язку (4), усередненої по всіх гравцях. Отримані графіки відповідають таким дисперсіям крайового значення $\chi_{\tilde{a}}$: $1 - \ d = 0$; $2 - d = 1$; $3 - \ d = 10$; $4 - \ d = 100$.

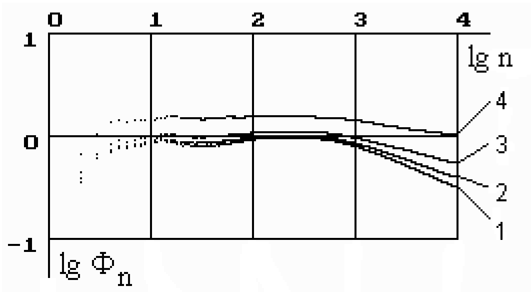

Рис. 2. Зміна середньої похибки розв’язку крайової задачі

З графіків видно, що дисперсія розподілу випадкових завад, що діють на межі області, не має значного впливу на збіжність ігрової задачі. Рекурентний метод (11) забезпечує зменшення середньої похибки обчислень у часі в зв’язку із його особливістю цілеспрямованої локалізації тих інтервалів значень випадкових функцій χ_n^i, які дають найбільший внесок у математичне сподівання розв’язку крайової задачі. Порівняно з методом Монте-Карло, який генерує рівноімовірні значення функцій χ_n^i з інтервалу їхніх допустимих значень, самонавчальний метод (11) потребує меншої кількості кроків для досягнення потрібної точності розв’язку.

Досягнуте значення точності розв’язування крайової задачі визначається довжиною пошукового підінтервалу h_i, який можна зменшувати після стабілізації середньої нев'язки. На рис. 3 показано графіки уточнення розв’язку χ , отримані при d=0 повторенням ігрового методу з новим значенням пошукового кроку. Графік з номером k відповідає кроку $h_i N_i^{-2k}$.

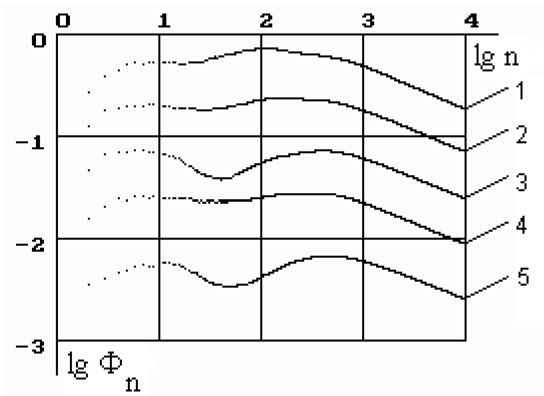

Рис. 3. Зміна середньої нев'язки розв’язку
при зменшенні кроку пошуку та d=0

Порівняння графіків рис. 2 із графіками рис. 3 вказує на покращання розв’язку задачі на декілька порядків.

Для стохастичних формулювань крайової задачі за значень дисперсії $d > 0$ точність ігрового методу обмежується значенням дисперсії випадкових величин. Для ілюстрації цього на рис. 4 зображено графіки зміни нев'язки розв’язку для повторюваної гри для значення $d = 1$.

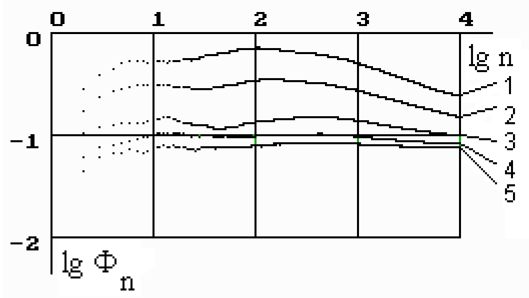

Рис. 4. Зміна середньої нев'язки розв’язку для повторюваної гри для d=1

Повторення гри здійснювалося за допомогою зменшення пошукового кроку в N_i разів після реалізації $n = 10^4$ ігрових стратегій. Як і раніше, графік з номером k отримано для кроку $h_i N_i^{-2k}$. З рис. 4 видно, що зменшення пошукового кроку в повторюваній грі призвело до незначного зменшення нев'язки розв’язку стохастичної крайової задачі. В результаті для заданого значення дисперсії досягнуто граничної точності $\sim 10^{-1}$.

Загалом швидкість збіжності ігрового методу залежить від початкової конфігурації сіткової області, початкового наближення до розв’язку, параметрів крайової задачі, параметрів ігрового методу, кількості гравців.

Збіжність гри сповільнюється зі зростанням розмірності скінченно-різницевої задачі. Для розв’язування цієї проблеми можна виконати сплайн-апроксимацію областей крайової задачі, що призведе до зменшення кількості гравців і, в результаті, до скорочення часу збіжності гри.

Висновки

1. Розглянуті ігрові методи забезпечують ефективну оптимізацію розподілених стохастичних систем в умовах невизначеності і належать до класу адаптивних пошукових методів, основаних на властивості самонавчання.

2. Самонавчання ґрунтується на перебудові векторів змішаних стратегій, яка закріплює статистично успішні варіанти розв’язків. В результаті забезпечується зменшення часу розв’язування оптимізаційної задачі порівняно з методом Монте-Карло.

3. Отримання незміщеного оптимального розв’язку задачі визначається належним вибором початкових наближень та параметрами, які задовольняють умови збіжності ігрового методу.

1. Фролов Ф.Ф. Граничные задачи для систем стохастических дифференциальных уравнений с частными производными // Теория вероятностей и ее применения. – 1988. – № 2. С. 409–412. 2. Розанов Ю.А. Марковские случайные поля и граничные задачи для стохастических уравнений в частных производных // Теория вероятностей и ее применения. –1987. – № 1. С. 1–34. 3. Шапиро Е.И. Непараметрические оценки плотности вероятности в задачах обработки результатов наблюдений // Зарубежная радиоэлектроника. – 1976. – № 2. С. 3–36. 4. Назин А.В., Позняк А.С. Адаптивный выбор вариантов: рекуррентные алгоритмы. – М., 1986. 5. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М., 1985. 6. Вазан М. Стохастическая аппроксимация. – М., 1972. 7. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая оптимизация и рекуррентное оценивание. – М., 1972.