ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 601, 2007, с. 67–72

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 601, 2007, p. 67–72

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ФЛУКТУАЦІЙ СТРИБКОВОЇ ПРОЦЕДУРИ У СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Я.М. Чабанюк [a]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 12 вересня 2007 р.)

Отримано достатні умови асимптотичної нормальності стрибкової процедури стохастичної апроксимації в напівмарковському середовищі в схемі дифузійного наближення з умовами балансу на сингулярне збурення функції регресії. Використано асимптотичні властивості компенсуючого оператора для чотирикомпонентного розширеного процесу марковського відновлення.

Ключові слова: асимптотична нормальність, напівмарковський процес, компенсуючий оператор.

2000 MSC: 60J10

УДК: 519.21+62

Вступ

Асимптотична нормальність флуктуацій *процедури стохастичної апроксимації* (ПСА) [1] навколо кореня рівняння регресії характеризує оцінку збіжності ПСА. Дослідження асимптотичної нормальності флуктуацій в класичних схемах ПСА реалізується з використанням принципу інваріантності для сум (в дискретних ПСА), та процесів (в неперервних ПСА)[1,2].

В [3] розглянуто задачу асимптотичної нормальності неперервної ПСА в напівмарковському середовищі в схемі серій з малим параметром $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$. Для вирішення цієї проблеми використовуються асимптотичні представлення *компенсуючого оператора* [4] розширеного процесу марковського відновлення [5], що забезпечує побудову породжуючого оператора граничного дифузійного процесу з використанням розв'язку проблеми сингулярного збурення [6].

У цій роботі розглядається стрибкова ПСА з асимптотично дифузійним збуренням в напівмарковському середовищі, для якої встановлюється асимптотична нормальність флуктуацій через властивості компенсуючого оператора.

I. Постановка задачі та означення

Стрибкова ПСА в схемі дифузійної апроксимації в напівмарковському середовищі задається в такому вигляді (важаємо, що $\sum\limits_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) := 0$):

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon),$$

$$u^\varepsilon(0) = u, t > 0. \tag{1}$$

Послідовність $a_n^\varepsilon, n \geq 0$, визначається значенням функції $a(t)$, $t > 0$, через співвідношення:

$$a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^4 \tau_n, n \geq 0, \tag{2}$$

де $\tau_n, n \geq 0$, – моменти марковського відновлення рівномірно ергодичного напівмарковського процесу (НМП) $x(t), t \geq 0$, в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ з лічильним процесом

$$\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}, t \geq 0.$$

НМП $x(t), t > 0$, задається напівмарковським ядром [5]

$$Q(x, B, t) = P(x, B) G_x(t), x \in X, B \in \boldsymbol{X},$$

$$t \geq 0.$$

Тут стохастичне ядро $P(x, B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$, задає перехідні ймовірності *вкладеного ланцюга Маркова* $x_n := x(\tau_n), n \geq 0$,

$$P(x, B) := P\{x_{n+1} \in B | x_n = x\} =: P\{\theta_x \leq t\},$$

з функцією розподілу $G_x(t), x \in X, t \geq 0$, часу перебування θ_x в стані $x \in X$

$$G_x(x) := P\{\theta_{n+1} \leq t \,| x_n = x\} .$$

Стохастичне ядром $P(x, B), B \in \boldsymbol{X}$, визначає оператор

$$\boldsymbol{P}\varphi(x) := \int\limits_X P(x, dy)\varphi(y). \tag{3}$$

на банаховому просторі дійснозначних функцій з супремумнормою $\|\varphi(x)\| := \sup\limits_{x \in X} |\varphi(x)|$.

Поряд з НМП $x(t), t \geq 0$, розглянемо *супроводжуючий марковський процес* $x_0(t), t \geq 0$, що задається генератором [6]

$$Q\varphi(x) := q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \quad (4)$$

де

$$q(x) := 1/g(x), \quad g(x) := \int_0^\infty \bar{G}_x(t)dt,$$

$$\bar{G}_x(t) := 1 - G_x(t).$$

Супроводжуючий марковський процес $x_0(t)$, $t \geq 0$, є рівномірно ергодичний [5] зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$. Стаціонарний розподіл $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$ вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$, задається рівнянням

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx)P(x, B), \quad \rho(X) = 1.$$

Між стаціонарними розподілами маємо зв'язок

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \quad q := \int_X \pi(dx)q(x),$$

або

$$\pi(dx) = \rho(dx)g(x)/m,$$

$$m := \int_X \rho(dx)g(x) = 1/q.$$

Стаціонарні розподіли $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$ та $\rho(B)$, $B \in \boldsymbol{X}$, визначають проектори Π та $\tilde{\Pi}$ відповідно

$$\Pi\varphi(x) := \widehat{\varphi}\boldsymbol{1}(x), \widehat{\varphi} := \int_X \pi(dx)\varphi(x),$$

$$\boldsymbol{1}(x) \equiv 1, x \in X,$$

$$\tilde{\Pi}\varphi(x) := \tilde{\varphi}\boldsymbol{1}(x), \tilde{\varphi} := \int_X \rho(dx)\varphi(x),$$

$$\boldsymbol{1}(x) \equiv 1, x \in X.$$

Завершуючи опис зовнішнього середовища відзначимо, що генератор Q є зведено-оборотним , тому для нього існує потенціал R_0 [5] такий, що $QR_0 = R_0Q = \Pi - I$, де I – тотожній оператор.

В ПСА (1) разом з (2) існують співвідношення

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^4\tau_n, n \geq 0.$$

Функція $C^\varepsilon(u, x)$ в ПСА (1) така, що

$$C^\varepsilon(u, x) := C(u, x) + \varepsilon^{-1}C_0(x), x \in X, \quad (5)$$

і задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du_x(t)/dt = C^\varepsilon(u_x(t), x), x \in X.$$

Функція регресії $C(u, x)$ така, що $C(u, \cdot) \in C^3(R)$, тому існує розклад Тейлора

$$C(u, x) = C^0(x) + uC^1(x) + u^2C_2(u, x), \quad (6)$$

де

$$C^0(x) = C(0, x), C^1(x) = C'(0, x), \quad (7)$$

$$C_2(u, x) = \frac{1}{2}C''(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1.$$

Для збурення $C_0(x)$ функції регресії (5) передбачається виконання умови балансу

УБ1: $\tilde{\Pi}C_0(x) := \int_X \rho(dx)C_0(x) = 0.$

За відповідних умов на функцію $a(t), t > 0$, стрибкова ПСА (1) збігається з ймовірністю одиниця до точки рівноваги $u_0 = 0$ усередненої системи [7]

$$du(x)/dt = C(u(t)),$$

де

$$C(u) := q \int_X \rho(dx)C(u, x). \quad (8)$$

Надалі $a(t) = a/t, a > 0, t > 0$.

Оскільки $u_0 = 0$, то існує рівність

$$C(0) = 0. \quad (9)$$

Враховуючи (7) та (8), маємо додаткову умову балансу

УБ2: $\tilde{\Pi}C^0(x) = 0$.

Асимптотична нормальність ПСА (1) встановлюється для нормованих флуктуацій

$$v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}[u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)]/\varepsilon, \quad (10)$$

де дифузійне збурення

$$C_0^\varepsilon(t) := \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C_0(x_k^\varepsilon), \quad (11)$$

визначається збуренням $C_0(x)$ з (5).

Зауваження 1. Нормована флуктуація (10) означає, що

$$v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}\tilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon, \quad (12)$$

де

$$\tilde{v}^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon),$$

або

$$u^\varepsilon(t) = \varepsilon[v^\varepsilon(t)/\sqrt{t} + C_0^\varepsilon(t)]. \quad (13)$$

Представлення (13) в дискретному випадку має вигляд

$$u_n^\varepsilon = \varepsilon[v_n^\varepsilon/\sqrt{\tau_n^\varepsilon} + C_n^\varepsilon],$$

де

$$C_n^\varepsilon := C_0^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon).$$

II. Асимптотична нормальність флуктуацій

Теорема 1. *При умовах збіжності ПСА (1) та при додаткових умовах УБ1, УБ2, а також*

$$D1: \rho^2 := 2\int_X \pi(dx)\tilde{C}_0(x)R_0\tilde{C}_0(x)-$$

$$-q\int_X \rho(dx)C_0^2(x) > 0, \widetilde{C}_0(x) := q(x)C_0(x);$$

$$D2: c_1 < -\frac{1}{2aq}, c_1 := \int_X \rho(dx)C^1(x),$$

існує слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow D_0(t), \varepsilon \to 0, t > 0,$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний двокомпонентний процес $\zeta(t), D_0(t)$, $t > 0$, *визначається генератором*

$$\boldsymbol{L}_t\varphi(v,w) = B(v,\sqrt{t}w)\varphi'_v(v,w)+$$

$$+\frac{a^2\rho^2}{2t^2}\varphi''_w(v,w), \qquad (14)$$

де

$$B(v,\sqrt{t}w) = \frac{1}{t}(bv + aq\sqrt{t}c_1 w),$$

$$b := aqc_1 + 1/2.$$

Висновок 1. Граничний процес флуктуацій $\zeta(t)$, $t > 0$, визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\zeta(t) = \frac{1}{t}[b\zeta(t) + aqc_1 w(t)]dt,$$

де $w(t)$ – гауссовський процес з дисперсією $\sigma^2 = a^2\rho^2$.

Висновок 2. В умовах теореми ПСА $v^\varepsilon(t)$ має асимптотично нормальний розподіл $N(0,\sigma^2)$, тобто

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow v, \varepsilon \to 0, t \to \infty.$$

Випадкова величина $v \in N(0,\sigma^2)$.

III. Властивості нормованого процесу флуктуацій

Введемо розширений процес марковського відновлення [5]

$$v_n^\varepsilon := v^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad C_n^\varepsilon := C_0^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad x_n^\varepsilon := x(\tau_n^\varepsilon),$$

$$\tau_n^\varepsilon := \varepsilon^4\tau_n, \quad n \geq 0, \qquad (15)$$

де τ_n– моменти марковського відновлення напівмарковського процесу $x(t), t \geq 0$. Компенсуючий оператор процесу (15) визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x) := \varepsilon^{-4}q(x)[E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, w_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon)|$$

$$v_n^\varepsilon = v, w_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t]-$$

$$-\varphi(v,w,x)], \qquad (16)$$

в позначеннях $C_n^\varepsilon = w_n^\varepsilon$.

Лема 1. *Компенсуючий оператор (16) розширеного процесу марковського відновлення (15) на тест-функціях* $\varphi(v,\cdot,\cdot) \in C^1(R)$, *має аналітичне представлення*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}q(x)[\mathbf{G}_t^\varepsilon(x)\mathbf{P} - I]\varphi(v,w,x), \quad (17)$$

де

$$\mathbf{G}_t^\varepsilon(x)\varphi(v,w) =$$

$$= \int_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}_{\varepsilon^4 s}^t(v)\mathbf{D}_v^\varepsilon(x)\mathbf{D}_w^\varepsilon(x)\varphi(v,w).$$

Тут клас напівгруп $\boldsymbol{C}_s^t(v), t > 0, s > 0$, визначаються генератором

$$\boldsymbol{C}_t(v)\varphi(v) = \frac{v}{2t}\varphi'(v),$$

а оператори зсуву $\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x)$, $\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x)$ через представлення

$$\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x)\varphi(v,w) = \varphi(v + \varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon(\frac{v}{\sqrt{t}} + w), x), w),$$

і

$$\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x)\varphi(v,w) = \varphi(v, w + \varepsilon^3\frac{a}{t}C_0(x)).$$

□ *Доведення.* Спочатку обчислимо прирости процесу (15), враховуючи означення (10) та (13), а також представлення (11).

Для приросту Δv_n^ε маємо (див. (12))

$$\Delta v_n^\varepsilon := v_{n+1}^\varepsilon - v_n^\varepsilon = [\sqrt{\tau_{n+1}^\varepsilon}\tilde{v}_{n+1}^\varepsilon - \sqrt{\tau_n^\varepsilon}\tilde{v}_n^\varepsilon]/\varepsilon =$$

$$= [\sqrt{t + \varepsilon^4\theta_x}\tilde{v}_{n+1}^\varepsilon - \sqrt{t}\tilde{v}_n^\varepsilon]/\varepsilon,$$

де $\tilde{v}_n^\varepsilon := \tilde{v}^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon)$.

Згідно з (12) та (13) в позначеннях $v_n^\varepsilon = v, C_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t$, з останнього маємо

$$\Delta v_n^\varepsilon = \varepsilon^4\frac{v}{2t}\theta_x + \varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon(\frac{v}{\sqrt{t}} + w), x) + h^\varepsilon(x),$$

де $h^\varepsilon(x)$ залишковий член: $h^\varepsilon(x) = o(\varepsilon^4), x \in X$.

Легко обчислити (див. (11)) приріст

$$\Delta C_n^\varepsilon := C_{n+1}^\varepsilon - C_n^\varepsilon = C_0^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon) - C_0^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x).$$

Тепер обчислюємо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(v_{n+1}^\varepsilon, C_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon)|v_n^\varepsilon = v, C_n^\varepsilon = w, x_n^\varepsilon = x,$$

$$\tau_n^\varepsilon = t] = E_{v,w,x,t}\varphi(v + \Delta v_n^\varepsilon, w + \Delta C_n^\varepsilon, x_{n+1}) =$$

$$= E_{v,w,x,t}\varphi(v+$$

$$+\varepsilon^4\frac{v}{2t}\theta_x + \varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon(\frac{v}{\sqrt{t}} + w), x), w+$$

$$+\varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x), x_{n+1}) =$$

$$= \int_0^\infty G_x(ds)\,\boldsymbol{C}_{\varepsilon^4 s}^t(v)\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x)\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x)\boldsymbol{P}\varphi(v,w,x).$$

З останнього і з означення компенсуючого оператора маємо (17). ■

Ключовим етапом доведення теореми є така лема.

Лема 2. *Компенсуючий оператор (17) розширеного процесу марковського відновлення (16) допускає асимптотичне представлення на тест-функціях $\varphi(v,w,\cdot)\in C^{3,4}(R\times R)$ в такому вигляді:*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x)=[\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}\frac{1}{t}Q_1(x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}Q_2(x)+\frac{1}{t}Q_3(x)+Q_0\theta_L^\varepsilon(x)]\varphi(v,w,x), \quad (18)$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v,w,x)=a\widetilde{C}_0(x)\mathbf{P}\varphi'_w(v,w,x), \quad (19)$$

$$Q_2(x)\varphi(v,w,x)=a\widetilde{C}^0(x)\mathbf{P}\varphi'_v(v,w,x), \quad (20)$$

$$\widetilde{C}^0(x):=q(x)C^0(x),$$

$$Q_3(x)\varphi(v,w,x)=[(a\widetilde{C}^1(x)+\frac{1}{2})v+$$

$$+a\sqrt{t}w\widetilde{C}^1(x)]\mathbf{P}\varphi'_v(v,w,x)+$$

$$+\frac{a^2}{2t}q(x)C_0^2(x)\mathbf{P}\varphi''_w(v,w,x), \quad (21)$$

а оператор Q_0 має представлення через (3)

$$Q_0\varphi(x)=q(x)\mathbf{P}\varphi(x)=q(x)\int\limits_X P(x,dy)\varphi(y). \quad (22)$$

Залишковий член $\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x)$ такий, що

$$|\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x)|\to 0,\varepsilon\to 0, 0\le t_0\le t\le T. \quad (23)$$

□ *Доведення.* Спочатку виконаємо елементарне перетворення компенсуючого оператора в формулі (17)

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon=\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-4}Q_0\boldsymbol{L}_0^\varepsilon,$$

де оператор Q визначений в (4), або інакше $Q=q(x)[\boldsymbol{P}-I]$, а

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon=\boldsymbol{G}_t^\varepsilon(x)-I. \quad (24)$$

Далі використаємо алгебраїчну тотожність

$$abc-1=a-1+b-1+c-1+(a-1)(b-1)+$$

$$+(a-1)(c-1)+(b-1)(c-1)+$$

$$+(a-1)(b-1)(c-1),$$

приймаючи $a:=\boldsymbol{C}^t_{\varepsilon^4 s}(v)$, $b:=\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x)$, $c:=\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x)$.

Отже, з (24) маємо представлення оператора $\boldsymbol{L}_0^\varepsilon$:

$$\boldsymbol{L}_0^\varepsilon=\boldsymbol{L}_a^\varepsilon+\boldsymbol{L}_b^\varepsilon+\boldsymbol{L}_c^\varepsilon+\boldsymbol{L}_{ab}^\varepsilon+\boldsymbol{L}_{ac}^\varepsilon+\boldsymbol{L}_{bc}^\varepsilon+\boldsymbol{L}_{abc}^\varepsilon. \quad (25)$$

Тепер обчислимо асимптотику кожного доданка в (25). Для $\boldsymbol{L}_a^\varepsilon$ інтегруванням частинами, маємо

$$\boldsymbol{L}_a^\varepsilon\varphi(v)=\int\limits_0^\infty G_x(ds)\left[\boldsymbol{C}^t_{\varepsilon^4 s}(v)-I\right]\varphi(v)=$$

$$=\varepsilon^4\boldsymbol{C}_t(v)\int\limits_0^\infty \bar{G}_x(s)\boldsymbol{C}^t_{\varepsilon^4 s}(v)ds\varphi(v), \quad (26)$$

де $\boldsymbol{C}_t(v)$ – генератор напівгруп $\boldsymbol{C}_s^t(v)$, тобто

$$d\boldsymbol{C}_s^t(v)/ds=\boldsymbol{C}_t(v)\boldsymbol{C}_s^t(v),$$

або в інтегральній формі з використанням нормування часу на ε^4

$$\boldsymbol{C}^t_{\varepsilon^4 s}(v)-I=\boldsymbol{C}_t(v)\int\limits_t^{t+\varepsilon^4 s}\boldsymbol{C}^t_{\varepsilon^4 l}(v)dl. \quad (27)$$

Ще раз інтегруючи (26) частинами і використовуючи (27), маємо

$$\boldsymbol{L}_a^\varepsilon\varphi(v)=\varepsilon^4\boldsymbol{C}_t(v)\left[g(x)+\boldsymbol{C}_t(v)\boldsymbol{G}_2^\varepsilon(x)\right]\varphi(v),$$

де

$$\boldsymbol{G}_2^\varepsilon(x)=\int\limits_0^\infty \bar{G}_x^{(2)}(s)\boldsymbol{C}^t_{\varepsilon^4 s}(v)ds,$$

а

$$\bar{G}_x^{(2)}(s):=\int\limits_s^\infty \bar{G}_x(t)dt,$$

або інакше

$$\boldsymbol{L}_a^\varepsilon\varphi(v)=\varepsilon^4 g(x)\boldsymbol{C}_t(v)\varphi(v)+\varepsilon^4\theta_a^\varepsilon(x)\varphi(v), \quad (28)$$

з залишковим членом

$$|\theta_a^\varepsilon(x)\varphi(v)|\to 0,\varepsilon\to 0,\quad \varphi(v)\in C^3(R).$$

Для оператора $\boldsymbol{L}_b$ маємо представлення

$$\boldsymbol{L}_b^\varepsilon\varphi(v)=\int\limits_0^\infty G_x(ds)[\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x)-I]\varphi(v)=$$

$$=[\boldsymbol{D}_v^\varepsilon(x)-I]\varphi(v)=$$

$$=\varphi(v+\varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon(\frac{v}{\sqrt{t}}+w),x))-\varphi(v). \quad (29)$$

Враховуючи розклад (6) в формі

$$C(\varepsilon u,x)=C^0(x)+\varepsilon uC^1(x)+\varepsilon^2u^2C^2(u,x),$$

з (29) маємо

$$\boldsymbol{L}_b^\varepsilon\varphi(v)=[\varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C^0(x)+$$

$$+\varepsilon^4\frac{a}{t}(v+\sqrt{t}w)C^1(x)]\varphi'(v)+\varepsilon^4\theta_b^\varepsilon(x)\varphi(v), \quad (30)$$

з залишковим членом

$$|\theta_b^\varepsilon(x)\varphi(v)|\to 0,\varepsilon\to 0,\quad \varphi(v)\in C^3(R).$$

Аналогічно маємо

$$\boldsymbol{L}_c^\varepsilon\varphi(w)=\int\limits_0^\infty G_x(ds)[\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x)-I]\varphi(w)=$$

$$=[\boldsymbol{D}_w^\varepsilon(x)-I]\varphi(w)=$$

$$= \varphi(w + \varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x)) - \varphi(w) =$$

$$= \varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x) \varphi'(w) +$$

$$+ \varepsilon^4 \frac{a^2}{2t^2} C_0^2(x) \varphi''(w) + \varepsilon^4 \theta_c^\varepsilon(x) \varphi(w), \qquad (31)$$

з залишковим членом

$$|\theta_c^\varepsilon(x)\varphi(w)| \to 0, \varepsilon \to 0, \quad \varphi(w) \in C^3(R).$$

Далі можна переконатися в тому, що решта членів в (25) є знехтуючими. Наприклад згідно з (28) і (30), отримуємо

$$\boldsymbol{L}_{ab}^\varepsilon \varphi(v) = \boldsymbol{L}_a^\varepsilon \boldsymbol{L}_b^\varepsilon \varphi(v) = \varepsilon^4 \theta_{ab}(x) \varphi(v), \qquad (32)$$

з $|\theta_{ab}^\varepsilon(x)\varphi(v)| \to 0, \varepsilon \to 0$, $\varphi(v) \in C^3(R)$.

Аналогічно з (28) і (31)

$$\boldsymbol{L}_{ac}^\varepsilon \varphi(v,w) = \boldsymbol{L}_a^\varepsilon \boldsymbol{L}_c^\varepsilon \varphi(v,w) = \varepsilon^4 \theta_{ac}(x) \varphi(v,w) \qquad (33)$$

а також з (30) і (31)

$$\boldsymbol{L}_{bc}^\varepsilon \varphi(w) = \boldsymbol{L}_b^\varepsilon \boldsymbol{L}_c^\varepsilon \varphi(w) = \varepsilon^4 \theta_{bc}(x) \varphi(w). \qquad (34)$$

Очевидним є також представлення

$$\boldsymbol{L}_{abc}^\varepsilon \varphi(v,w) = \boldsymbol{L}_a^\varepsilon \boldsymbol{L}_b^\varepsilon \boldsymbol{L}_c^\varepsilon \varphi(v,w) =$$

$$= \varepsilon^4 \theta_{abc}(x) \varphi(v,w). \qquad (35)$$

Підставляючи (28)–(35) в розклад (25) та враховуючи решту знехтуючих членів, отримуємо представлення (18). ■

IV. Доведення теореми

Завершальним етапом побудови граничного оператора $\boldsymbol{L}_t$ є використання розв'язку проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon = \varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2} \frac{1}{t} Q_1(x) Q_0 +$$

$$+ \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sqrt{t}} Q_2(x) Q_0 + \frac{1}{t} Q_3(x) Q_0 \qquad (36)$$

з (18) на тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(v,w,x) = \varphi(v,w) + \varepsilon^2 \frac{1}{t} \varphi_2(v,w,x) +$$

$$+ \varepsilon^3 \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi_3(v,w,x) + \varepsilon^4 \frac{1}{t} \varphi_4(v,w,x). \qquad (37)$$

Лема 3. *Граничний генератор* $\mathbf{L}_t$ *визначається розв'язком проблеми сингулярного збурення для оператора* $\mathbf{L}_{t0}^\varepsilon$.

□ *Доведення.* Розглянемо проблему сингулярного збурення для оператора $\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon$:

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v,w,x) = \frac{1}{t} \widehat{\boldsymbol{L}}_t \varphi(v,w) + \theta_{L0}^\varepsilon(x) \varphi(v,w). \qquad (38)$$

Приймаючи (37) в ліву частину (38), з урахуванням розкладу (36), отримаємо систему рівнянь

$$Q\varphi(v,w) = 0, \qquad (39)$$

$$Q\varphi_2(v,w,x) + Q_1(x)\varphi(v,w) = 0, \qquad (40)$$

$$Q\varphi_3(v,w,x) + Q_2(x)\varphi(v,w) = 0, \qquad (41)$$

$$Q\varphi_4(v,w,x) + \frac{1}{t} Q_1(x) \varphi_2(v,w,x) +$$

$$+ Q_3(x)\varphi(v,w) = \widehat{\boldsymbol{L}}_t \varphi(v,w). \qquad (42)$$

Рівняння (39) очевидно справедливе для всіх тест-функцій $\varphi(v,w)$, що не залежать від аргументу $x \in X$.

Розв'язність рівняння (40) забезпечується умовою балансу УБ1, а саме:

$$\Pi Q_1(x) = a \Pi \widetilde{C}_0(x) = a \int_X \pi(dx) q(x) C_0(x) =$$

$$= aq \int_X \rho(dx) C_0(x) = 0.$$

Отже, розв'язок рівняння (40), згідно з [6], такий:

$$\varphi_2(v,w,x) = R_0 Q_1(x) \varphi(v,w).$$

Розв'язність рівняння (41) забезпечується умовою балансу УБ2, а саме:

$$\Pi Q_2(x) = a \Pi \widetilde{C}^0(x) = aq \int_X \rho(dx) C^0(x) = 0.$$

Нарешті умова розв'язності рівняння (42) дає вираз граничного оператора $\widehat{\boldsymbol{L}}_t$

$$\widehat{\boldsymbol{L}}_t = \frac{1}{t} \Pi Q_1(x) R_0 Q_1(x) \Pi + \Pi Q_3(x) \Pi. \qquad (43)$$

Враховуючи, що [9]

$$\boldsymbol{P} R_0 = R_0 + g(x)[\Pi - I],$$

для першого доданку з (43) маємо

$$\frac{1}{t} \Pi Q_1(x) R_0 Q_1(x) \Pi \varphi(v,w) =$$

$$= \frac{a^2}{t} \Pi \widetilde{C}_0(x) \boldsymbol{P} R_0 \widetilde{C}_0(x) \varphi''_w(v,w) =$$

$$= \frac{a^2}{t} [\Pi \widetilde{C}_0(x) \boldsymbol{P} R_0 \widetilde{C}_0(x) -$$

$$- \Pi \widetilde{C}_0(x) g(x) \widetilde{C}_0(x)] \varphi''_w(v,w) =$$

$$= \frac{a^2}{t} \int_X \pi(dx) \widetilde{C}_0(x) R_0 \widetilde{C}_0(x) \varphi''_w(v,w) -$$

$$- \frac{a^2}{t} q \int_X \rho(dx) C_0^2(x) \varphi''_w(v,w).$$

Для другого доданку, використовуючи (21), отримуємо

$$\Pi Q_3(x)\Pi\varphi(v,w) = B(v,\sqrt{t}w)\varphi'_v(v,w)+$$
$$+\frac{a^2}{t}q\int\limits_X \rho(dx)C_0^2(x)\varphi''_w(v,w),$$

в позначеннях Теореми.

Отже, з того що, $\boldsymbol{L}_t = \frac{1}{t}\widehat{\boldsymbol{L}}_t$ маємо зображення (14).

Оскільки залишковий член $\theta^{\varepsilon}_{L0}(x)\varphi(v,w)$ в (38) такий, що $|\theta^{\varepsilon}_{L0}(x)\varphi(v,w)| \to 0, \varepsilon \to 0$, то в границі ним можна знехтувати. Відзначимо, що малий доданок в представленні (18) оператора $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t$ теж не впливає на вигляд граничного оператора $\boldsymbol{L}_t$, оскільки існує (23).

Завершуємо доведення Теореми за схемою, що наведена при доведенні теореми 6.6. §6, роботи [8]. ■

Висновки

Асимптотичну нормальність ПСА в R^d, $d > 1$, можна отримати аналогічно з додатковими технічними ускладненнями.

Література

[1] Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.:Наука, 1972. – 304с.

[2] Ljung L., Pflug G., Walk H. Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992. – 113P.

[3] Чабанюк Я.М. Асимптотична нормальність неперервної процедури стохастичної апроксимації в напівмарковському середовищі // Доп. НАН України, – 2006, – № 5/ – С. 23–30.

[4] Вентцель Е.С. Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. – М.: Наука, – 1986. – 176с.

[5] Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их применение. – К.: Наук. думка, – 1976. –184с.

[6] Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic Models of Systems. Kluwer // Academic Publishers, – 1999, – 185p.

[7] Чабанюк Я.М. Дискретна процедура стохастичної апроксимації в схемі дифузійного усереднення // Математичні студії. – Львів, 2000. – **14**, №2. – С.202–212.

[8] Koroliuk V., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space // World Scientific Publishing, – 2005. – 330P.

ASYMPTOTIC NORMALITY FLUCTUATIONS JUMPING PROCEDURE IN DIFFUSION APPROXIMATION SCHEME IN SEMI-MARKOV MEDIA

Ya.M. Chabanyuk [a]

[a] *National University "Lvivska Politechnika"*
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

There is obtained the sufficient conditions the asymptotic normality of the jumping stochastic approximation procedure in semi-Markov media in the diffusion approximation scheme with satisfy the balance condition by singular perturbation when the regressions function. By using the asymptotic representation the compensating operator for the four-components of Markov renewal process.

Keywords: asymptotic normality, semi-Markov process, compensating operator.

2000 MSC: 60J10

UDK: 519.21+62