УДК 621.3

С.Ф. Роботько
Вінницький державний аграрний університет

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ ПРИ ВИПАДКОВОМУ ПОПИТІ

Розглядається математична модель управління запасами при випадковому попиті в умовах можливості переривання потоку вимог. Для аналізу процесу застосовується апарат теорії поновлення. Отримано імовірнісні розподіли процесів, а також формули для розрахунку моментних характеристик процесу.

In operation the mathematical model of storekeeping is considered at random demand in conditions of possibility of interruption of stream of the requirements. The vehicle of a renewal theory is applied to the analysis of the process. The probabilities of allocations of processes, and also formula for account moments of the characteristics of processes are obtained.

Створення запасів, їх зберігання, розхід і поповнення характерні для всіх видів господарської діяльності – від домогосподарства до галузі економіки. По суті справи будь-які вироби або ресурси, які не використовуються безпосередньо на цей момент часу, можна вважати запасом. Тому проблеми управління запасами розглядають не тільки спеціалізовані організації – з ними зустрічається практично кожна людина.

Класичні моделі теорії управління запасами [1, 2] ґрунтуються на основі побудови унімодальних функцій, які виражають залежність сумарних витрат управління запасами від параметрів попиту і політики управління запасами. При цьому попит вважається таким, що достеменно відомий і не є серйозною перешкодою для аналізу моделі.

У цій роботі розглядається модель управління з периванням попиту, яка уточнює прості моделі, розроблені раніше [4]. Особливістю моделі, що розглядається, є те, що вона враховує особливості зміни характеру процесів, які відбуваються в реальних процесах постачання.

Переривання потоку вимог

Вважатимемо, що вимоги (кожне на одну одиницю товару) надходять через випадкові інтервали часу ξ_i, які не залежать один від одного і мають однакову функцію розподілу $F(x)$ і середнє m_x $(m_x \langle \infty)$. З виникненням і задоволенням цих вимог запас товару, що є на складі $I(t)$, зменшується і, коли його рівень знижується до значення $r \geq 0$ (r – називається точкою замовлення), подається замовлення на q одиниць товару. Це замовлення задовольняється через випадковий час τ, який має функцію розподілу $G(x)$ і кінцеве середнє. Можливо, що після подачі замовлення чергові r вимог надійдуть раніше, ніж буде одержана замовлена партія, і рівень $I(t)$ знизиться до нуля (склад спорожниться). У цьому випадку вимоги припиняють надходити і витрачання запасу поновлюється тільки після одержання поновлення, причому час з моменту поповнення до наступної вимоги має розподіл $F(x)$. Таким чином, при спустошенні складу потік вимог переривається.

Трохи інша, але близька модель буде одержана, якщо уявити, що вимоги хоча і продовжують надходити при спорожнінні запасу, але не стають у чергу, а залишаються невиконаними (незадоволеними), так що заборгованості не виникає.

Якщо потік вимог є рекурентним, то розподіл часу від моменту надходження поповнення в спорожнілий склад до надходження чергової вимоги залежатиме від того, який час склад був порожнім. Можна зауважити, що в разі пуасоонівського потоку вимог модель з перериванням і модель із втратою вимог збігаються (тобто процес $I(t)$ в обох моделях змінюється за одними ймовірнісними законами).

Обмежимось випадком, коли $q \geq r$. Тоді після того, як замовлена партія надійде, $I(t)$ буде не нижче точки замовлення; у міру надходження нових вимог $I(t)$ опуститься до *r*, буде подано нове замовлення обсягом q одиниць товару, на його виконання витратиться випадковий проміжок часу τ тощо. Отже, задовольняючи чергові q вимог, склад подає замовлення того самого розміру, щоб поновити цей запас.

Згідно з постановкою задачі процес $I(t)$ є регенеруючим, причому точками регенерації зручно уявити моменти подачі замовлення, коли $I(t)$ знижується до r. Дійсно, в силу незалежності величин $\{\xi_i\}_{i=l}^{\infty}, \{\tau_i\}_{i=l}^{\infty}$ розвиток процесу $I(t)$ в інтервалах між будь-якими суміжними моментами замовлень не залежить від попередньої історії процесу.

Насамперед розглянемо випадкову величину Θ – час між сусідніми моментами подачі замовлень. Ця величина може бути представлена виразом

$$\Theta = \max(\tau, E_r) + \sum_{i=r+1}^{q} \xi_i, \tag{1}$$

де $E_r = \sum_{i=1}^{r} \xi_i$.

Дійсно, цикл регенерації, що розглядається, починається в момент, коли $J(t) = r$, і посилається замовлення на поповнення запасу. Якщо чергові *r* вимог надійдуть раніше, ніж це поповнення, тобто станеться так, що $\tau > E_r$, то Θ можна визначити як суму τ і час надходження тих $q - r$ вимог, які зменшать запас, що буде в момент τ із *q* одиниць товару до точки замовлення *r*. Коли $\tau \leq E_r$ і спорожніння не трапляється, то час Θ являє собою час надходження *q* вимог у рекурентному потоці без переривання.

Формула (1) дає змогу визначити розподіл Θ, але нам поки що достатньо знати середнє значення. Оскільки

$$P\{\max(\tau, E_r) \leq x\} = P\{\tau \leq x\} P\{E_r \leq x\} = G(x) F_r(x),$$

то, використовуючи визначення математичного очікування , одержимо

$$M_{\Theta} = \int_0^{\infty} [1 - G(x)] F_r(x) dx + (q-r) m_x = \int_0^{\infty} [1 - F_r(x)] dx + \int_0^{\infty} [1 - G(x)] F_r(x) dx + (q-r) m_x .$$

Тепер, об'єднавши перший і тертій доданки, одержимо

$$M_{\Theta} = qm_x + \int_0^{\infty} [1 - G(x)] F_r(x) dx . \qquad (2)$$

Вважатимемо, що початок відліку часу збігається з точкою регенерації процесу $I(t)$, і позначимо через γ час до першого спорожніння складу. Визначимо середнє значення цього проміжку часу M_{γ} із співвідношення

$$M\gamma = \rho ME_r^{''} + (1-\rho)\left[M_{\gamma} + ME_r^{'} + (q-r)m_x\right], \qquad (3)$$

де – $\rho = P\{E_r \le \tau\} = \int_0^{\infty} [1 - G(x)] dF_r(x)$.

Співвідношення (3) ґрунтується на тому, що з ймовірністю ρ склад може спорожніти на першому циклі регенерації (при цьому $M\gamma = \rho ME_r$), а з ймовірністю $1-\rho$ – спорожніння не трапиться і перший цикл триватиме в середньому $[ME_r + (q-r)m_x]$, після чого все немов би почнеться спочатку. Враховуючи, що $\rho ME_r + (1-\rho)ME_r = rm_x$, із (3) одержимо

$$M_{\gamma} = \frac{qm_x}{\rho}. + (q+r)m_{x.} .$$

Введемо до розгляду ще одну випадкову величину γ' – інтервал між сусідніми спорожнiннями (від моменту одержання поповнення в порожній склад до наступного спорожніння). Оскільки в початковий момент цього інтервалу $I(t) = q$ і до найближчої точки регенерації повинно надійти $q-r$ вимог, справедливим буде співвідношення

$$\gamma^{'} = \sum_{i=1}^{q-r} \xi_i + \gamma ,$$

звідки, наприклад, виходить, що $M_{\gamma'} = qm_x \,/\, \rho$.

Щоб детально дослідити величину γ, запишемо співвідношення до її перетворення Лапласа

$$Me^{-s\gamma} = \rho Me^{-sE_r^{''}} + (1-\rho) M \exp\left[-s(\gamma + E_r^{'} + \sum_{i=r+1}^{q} \xi_i)\right] ,$$

яке випливає з тих самих роздумів, що й (3). Введемо позначення

$$Me^{-s\gamma} = \varphi(s), Me^{-sE_r^{'}} = f_r(s), Me^{-sE_r^{''}} = f_r^{''}(s), Me^{-s} = f(s)$$

і, враховуючи, що $\rho f_r^{''}(s) + qf_r^{'}(s) = f^{r}(s)$, перепишемо співвідношення для перетворення Лапласа величини γ

$$\varphi(s) = \rho f_r^{''}(s) + \varphi(s)\left[f^{r}(s) - \rho f_r^{''}(s)\right] f^{q-r}(s),$$

звідки

$$\varphi(s) = \frac{\rho f_r^{''}(s)}{1 - f^{q}(s) + \rho f_r^{''}(s) f^{q-r}(s)}. \qquad (4)$$

Розглянемо за допомогою (4) асимптотичну поведінку γ при малих ρ, тобто, коли ймовірність не дочекатися поновлення мала. Практично цього можна добитися завчасно, подаючи замовлення, тобто вибираючи велике значення r. Зазначимо, що при малих ρ різниця між γ і γ' стає неістотною. Доведено, що величина типу (4) сходиться до перетворення Лапласа вигляду $\frac{1}{(1+s)}$. Але це є не що інше, як перетворення Лапласа експоненційного розподілу. Тому при малих значеннях ρ можна користуватись формулою

$$R(t) = P\{\gamma\rangle t\} \approx e^{-\frac{\rho t}{q m_x}}. \tag{5}$$

Враховуючи властивості пуассонівського розподілу, потік перебоїв у постачанні є пуассонівським.

Для того, щоб вирахувати стаціонарний розподіл рівня запасів, скористаємось теоремою Сміта [3], з якої випливає, що ймовірність перебування процесу в деякій фазі, визначається як

$$\lim P\{v(t) = i\} = M_{\omega_i} / M_{\theta},$$

де M_{ω_i} – математичне очікування довжини i -ї фази.

Під фазою $\omega_i \left(i \in \overline{0,q+r}\right)$ розумітимемо той інтервал з циклу Θ, на якому $I(t) = i$. Така нумерація не відповідає порядку, в якому чергуються фази, але вона більш зручна; за один цикл регенерації надходять q вимог і інтервали $\xi_j \left(j \in \overline{1,q}\right)$ нумеруватимемо в порядку надходження цих вимог.

Розглянемо зменшення $I(t)$ від r до 0. Фаза ω_r продовжиться протягом часу ξ_i, якщо тільки поновлення не надійшло раніше, отже, $\omega_r = min(\xi_i, \tau)$. Взагалі, фаза $\omega_{r-i}, i \in 0,r-1$ або не настане, якщо $E_i = \sum_{j=1}^{i} \xi_j \geq \tau$, або триватиме протягом часу ξ_{i+1}, або перерветься з надходженням поповнення. Таким чином,

$$\omega_{r-i} = \min\{\xi_{i+1}, (\tau - E_i)^+\}, i \in \overline{0, r-1},$$

де $(u)^+ \equiv \max(0, u)$.

Зрозуміло, що $\omega_0 = (\tau - E_r)^+$.

Тривалість фаз $\omega_{q+r+i}, i \in \overline{0,r-1}$ легко знайти за допомогою співвідношення

$$\omega_{r-i} + \omega_{q+r+i} = \xi_{i+1,} i \in \overline{0, r-1}.$$

Коли $I(t)$ зменшується від q до r $\omega_q = \xi_{r+1}, \omega_{q-1} = \xi_{r+2}, \ldots, \omega_{r+1} = \xi_q$.

Оскільки

$$P_i = \lim P\{I(t) = i\} = M_{\omega_i} / M_{\theta}, i \in \overline{0, q+r},$$

залишається визначити середню тривалість всіх фаз.

Попередньо зазначимо, що

$$P\{\tau - E_i > u\} = \int_0^\infty F_i(t-u)dG(t), -\infty < u < \infty, \tag{6}$$

де $F_i(t)$ - i – кратна згортка.

Зробивши заміну $t - u = \upsilon$, одержимо

$$P\{(\tau - E_i)^+ > u\} = \int_0^\infty F_i(t-u)dG(t) = \int F_i(v)dG(u+v), u \geq 0\,. \tag{7}$$

Тепер із (7) виходить, що

$$M_{\omega_0} = \int_0^\infty P\{(\tau - E)^+ > u\}du = \int_0^\infty\int_0^\infty F_r(v)dG(u+v)du\,. \tag{8}$$

Змінивши порядок інтегрування, знайдемо

$$M_{\omega 0} = \int_0^\infty [1 - G(v)]F_v(v)dv. \tag{9}$$

Зазначимо, що ця формула витікає безпосередньо з (2), оскільки цикл регенерації складається з часу надходження q вимог і інтервалу спорожніння. Із (6) аналогічно знаходимо

$$M_{\omega r-i} = \int_0^\infty P\{\xi_{i+1} > u\}P\{(\tau - E_i)^+ > u\}du = \int_0^\infty [1 - F(u)]\int F_i(v)dG(u+v)du, i \in \overline{o}, r - \overline{1}.$$

Нарешті з (8) випливає, що

$$M\omega_{q+r-i} = m_x - M_{\omega r-i}, i \in 0, r - \overline{1}\,.$$

Таким чином, стаціонарний розподіл $J(t)$ знайдено.

Середній рівень запасів у стаціонарному режимі можна було б обчислити усередненням за знайденим розподілом p_i, але ми можемо використати властивість процесів поновлення, звідки

$$\lim_{T\to\infty} MI(t) = \lim_{T\to\infty} M\frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{MY(t)}{T},\quad \partial e Y(t) = \int_0^T I(t)dt \text{ – процес накопичення}$$

Тому $\lim\limits_{T\to\infty} MI(t) = \dfrac{MY(\Theta)}{M_\Theta}$, припускаючи, що $t = 0$ – точка регенерації. Розглядаючи зміну $I(t)$ на одному циклі регенерації, встановимо, що

$$Y(\Theta) = \sum_{i=1}^{r}(r+1-i)\xi_i + q(E_r - \tau)^+ + \sum_{i=r+1}^{q}(q+r+1-i)\xi_i\,.$$

Враховуючи рівність $M(E_r - \upsilon)^+ = M(E_r - \tau) + M(\tau - E_r)^+$ і формулу (9), отримаємо

$$MY(\Theta)=m_x\sum_{i=1}^{r}(r+1-i)+q\left\{rm_x-M_\tau+\int_0^\infty[1-G(x)]F_r(x)dx\right\}+m_x\sum_{i=r+1}^{q}(q+r+1-i),$$

$$MY(\Theta)=\frac{m_x}{2}r(r+1)+q\left\{rm_x-M_\tau+\int_0^\infty[1-G(x)]F_r(x)dx\right\}+\frac{m_x}{2}(q-r)(q+r+1),$$

звідки одержимо

$$MY(\Theta)=\frac{m_x}{2}q(q+2r+1)-q\left\{M_\tau-\int_0^\infty[1-G(x)]F_r(x)dx\right\}.$$

$$\lim_{t\to\infty}MI(t)=\frac{m_x q(q+2r+1)/2-q(M_\tau-b_r)}{qm_x+b_r},$$
$$b_r=\int_0^\infty[1-G(x)]F_r(x)dx. \tag{10}$$

Одержані аналітичні вирази дають змогу провести вартісну оцінку процесу управління запасами при застосуванні описаної моделі. Введемо плату за одиницю часу спорожніння складу (плату за дефіцит, втрачений прибуток) C_0, лінійну інтенсивність витрат зберігання запасу $C_i=qi$ і вартість подачі замовлення C_q. Тоді за допомогою знайдених формул можна відразу записати стаціонарну інтенсивність загальних витрат як функцію параметрів управління r і q

$$C(r,q)=C_0P_0+C_1\lim MJ(t)+\frac{C(q)}{M(\Theta)},$$

або

$$C(r,q)=\frac{C_0b_r+C_1q\left(\dfrac{q+2r+1}{2}m_x-M_\tau+b_r\right)+C_q}{qm_x+b_r}, \tag{11}$$

де b_r визначається з (10).

Висновки

Основні характеристики моделі з перериванням потоку вимог, яка має довільні функції розподілу F(x) і G(x), можна знайти через згортки функції F(x). В загальному випадку обчислення цих згорток рекурентною формулою $F_{i+1}(t)=\int_0^t F_i(t-x)dF(x), i\geq 1$ і може виявитись непростим. Але в деяких випадках можливо знайти явні формули. Наприклад, для пуассонівського потоку вимог з інтенсивністю λ, коли $F(t)=1-exp(-\lambda t)$ відомо, що

$$F_r(t)=1-\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\equiv d(r,\lambda t).$$

Наведемо формули, одержані в припущенні, що потік вимог пуассонівський, $\tau = const$.

Для середнього значення інтервалу Θ між черговими замовленнями запишемо

$$M_{\Theta} = \frac{q}{\lambda} + \tau d(r, \lambda t) - rd(r+1, \lambda\tau)/\lambda.$$

Середнє значення інтервалу γ' між сусідніми періодами можна знайти за формулою

$$M\gamma' = q(\lambda d(r, \lambda\tau)).$$

Середній рівень запасу в стаціонарному режимі визначається як

$$b_r = \tau d(r, \lambda\tau) - rd(r+1, \lambda\tau)/\lambda.$$

Підставивши ці параметри в (11), можна побудувати оптимізаційну модель для знаходження оптимальних значень параметрів.

1. Хедли Дж., Уайтин Т. Теория управления запасами. – М., 1969. 2. Букан Дж., Кенингсберг З. Научное управление запасами. – М., 1971. 3. Кокс Р., Смит В. Теория восстановления. – М., 1971. 4. Роботько С.Ф. Аналіз моделей управління запасами при випадковому попиті: Сб. тр. Межд. симп. «Наука и предпринимательство» / Спец. вип. журналу «Вісник Вінницького державного сільськогосподарського інституту». – Вінниця, 1999. – С. 93 – 97.

УДК: 338.256

С.В. Скибінський, Л.М. Орел
Львівська комерційна академія

СКЛАДОВІ БРЕНДІНГУ: ТЕОРІЯ І ПРАКТИКА

Визначено окремі поняття брендінгу. Розглянуто еволюцію цих понять. Порівнюється їх трактування у нормативно-правових актах, довідкових джерелах та на практиці.

Different terms of branding are determined. The evolution of these concepts is considered. Their interpretation in quated and legal statement, literary and reference sources and on practise is compared.

Поточний період розвитку економіки України супроводжується інтенсивним розвитком сфери обміну, застосуванням передових сучасних концепцій, технологій та інструментів з їх реалізації, виникненням та стрімким розвитком окремих галузей, зокрема рекламної. Обсяги витрат на рекламу за 2000 – 2001 рр. зросли на 81,7 % або у 1,8 раза і становили 2001 р. 556 млн. дол. [14]. І зарубіжні експерти оцінюють такі темпи розвитку як високі. Все це зумовлює необхідність відповідної інфраструктури (навчальних закладів і нових спеціальностей, технічного забезпечення теле- та радіокомунікацій, кваліфікованого художнього і естетичного оформлення реклами та створення кліпів, законодавчого забезпечення діяльності та залучення інвестицій).

Помітне місце у маркетингу товарів все більшої кількості фірм відводиться товарному знаку, марці. Останнім часом набувають поширення терміни брендінгу, бренда. Зауважимо,