(позицій), потім вмінь і лише в кінці підбір відповідних змісту методів і засобів дидактично-виховної роботи.

Сьогодні вже можна зауважити, що впроваджена реформа у багатьох її елементах є недопрацьованою або знаходиться на етапі вдосконалення роботи.

1. Dziennik Ustaw nr 13, poz. 74, z 1996 r. 2. Dziennik Ustaw nr 91, poz. 578, z 1998 r. 3. Dziennik Ustaw nr 91, poz. 576, z 1998 r. 4. Jaroslaw Kardziński. Skuteczne zarządzanie szkołą, cz. 4, roz. 1, podrozdział 1. – Str. 2 – 3. Wyd. Verlag Dashófer sp. z o-o.o., 1999 r. 5. Ustawa z dnia 8 stycznia 1999 r. 6. Jarosław Kardziński. Skuteczne zarządzanie szkołą, cz. 3, roz. 1, podrozdział 2.2; 2.3; 2.4. – Str. 1 – 3. Wyd. Verlag Dashófer sp. z o-o.o., 1999 r.

УДК 330.4

Р.Й. Петрович
Національний університет "Львівська політехніка"

ПРО ЗБІЖНІСТЬ БАГАТОКРАТНОГО АГРЕГАТИВНО-ІТЕРАТИВНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Запропоновано агрегативно-ітеративний алгоритм для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, отримано критерій його збіжності, який легко перевіряється на практиці. На основі цього критерію запропоновано простий спосіб обчислення параметрів, потрібних для побудови агрегативно-ітеративних алгоритмів.

The aggregative-iterational algorithm for solving of systems of the linear algebraic equations is proposed. The criterion of its convergence, which is easily checked in practice is received. With the help of this criterion the simple way of calculation of parameters necessary for construction aggregative-iterational algorithms is offered.

В математичній економіці для систем лінійних алгебраїчних рівнянь нерідко використовують методи ітеративного агрегування. Відомо, що ці методи мало досліджені і, як зазначає М.О. Красносельський, умови їх збіжності практично невідомі. Пропонується підхід до дослідження збіжності методів ітеративного агрегування, який дає змогу отримати нові результати.

Методи ітеративного агрегування досліджували Л.М. Дудкін, Е.Б. Єршов, Б.А. Щенніков, Л.А. Хіздер, І.М. Ляшенко, М.В. Калініна, В.Я. Стеценко, А.А. Бабаджанян. Як для загальних багатопараметричних алгоритмів, так і для однопараметричного варіанта методу ітеративного агрегування для систем лінійних рівнянь вигляду

$$x = Ax + b, \tag{1}$$

де $x \in R^N$, $b \in R^N$, A – матриця розміру N×N, одним з основних обмежень, які фігурують в цих роботах, є вимога про знакосталість компонент матриці *A* та вектора *b*. Серед інших обмежень, які у цих дослідженнях гарантують збіжність методів, фігурує також вимога, щоб норма матриці *A* була меншою за 1/2 або й за 1/3. Для однопараметричного випадку М.А. Красносельським, Є.А. Ліфшицем і А.В.Островським [1] отримано умови збіжності, які містять вимогу, щоб спектральний радіус матриці *A* був менший за одиницю при додатних компонентах матриці *A* та вектора *b*. В тій самій книзі зазначено, що на практиці одно-параметричний варіант методу ітеративного агрегування "збігається й у ряді випадків, зокрема, якщо спектральний радіус матриці системи *A* більший за одиницю. Для багатопараметричного варіанта методу умови збіжності невідомі". В 1990 – 1995-х роках Б.А. Шуваром запропонована методика побудови і дослідження агрегативно-ітеративних методів, яка не вимагає знако-сталості компонент матриці *A* і вектора *b* за припущень, які не обов'язково містять вимогу, щоб спектральний радіус матриці *A* був менший за одиницю. Отже, дослідження умов збіжності методів ітеративного агрегування з теоретичного і практичного погляду є актуальним завданням.

В [2] побудовані і досліджені ітераційні алгоритми для лінійних рівнянь в скінченно-вимірному просторі, названі багатократними агрегативно-ітеративними алгоритмами. У цьому дослідженні розглядається один із таких алгоритмів, який одержується за допомогою спеціального вибору ітераційних параметрів. Спосіб вибору цих параметрів дає змогу сформулювати твердження про збіжність методу, яке легко перевірити на практиці.

Для систем лінійних рівнянь вигляду (1) пропонується ітераційний алгоритм

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{2}$$

$$y^{(n+1)} = \left(I - \Lambda + \alpha\right)^{-1}\left(-\Phi^T A_2 x^{(n)} + \alpha y^{(n)}\right), \tag{3}$$

де $x^{(n)} \in R^N$, $y^{(m)} \in R^m$ – вектор ітераційних параметрів, Λ; α – матриці розміру m×m; $\Lambda = diag(\lambda_1,...,\lambda_m)$ – діагональна матриця розміру m×m; *a* – матриця розміру N×m; Φ – матриця розміру N×m і $\Phi^T a + \alpha = \Lambda$, $A_2 = A - \Psi\Lambda\Phi^T$; Ψ – матриця розміру N×m; $\Phi^T\Psi = I$, *I* – одинична матриця розміру m×m.

Для вибору початкових наближень пропонується множина

$$\varepsilon_m = \left\{\{x, y\} \middle| x \in R^N, y \in R^m, \Phi^T x + y = \left(I - \Lambda\right)^{-1}\Phi^T b\right\}. \tag{4}$$

Ітераційний процес (2), (3) у просторі R^{N+m} можна подати у вигляді

$$z^{(n+1)} = Cz^{(n)} + d, \tag{5}$$

де $z^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} b \\ \Theta_m \end{pmatrix}$, $\Theta_m \in R^m$ – вектор з нульовими компонентами,

$$C = \begin{pmatrix} A + a\left(I - \Lambda + \alpha\right)^{-1}\Phi^T A_2 & a\left(I - \Lambda + \alpha\right)^{-1}\left(I - \Lambda\right) \\ \left(I - \Lambda + \alpha\right)^{-1}\Phi^T A_2 & \left(I - \Lambda + \alpha\right)^{-1}\alpha \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Доведено таке твердження про збіжність алгоритму (2), (3).

Теорема 1. Нехай матриця C має спектральне подання

$$C = \sum_{i=1}^{N+m} \lambda_i \tilde{\psi}_i \tilde{\varphi}_1^T \tag{7}$$

і для її власних чисел справджуються нерівності

$$\left|\lambda_{N+m}\right| \le \ldots \le \left|\lambda_{m+1}\right| < \left|\lambda_m\right| \le \ldots \le \left|\lambda_1\right|, \qquad \left|\lambda_{m+1}\right| < 1. \tag{8}$$

Тоді, якщо початкове наближення $z^{(0)}$ належить до множини (4), то ітераційний процес (2),(3) збігається до розв'язку системи (1), причому

$$\left\|x^{(n)}-x^{*}\right\| \le K\left|\lambda_{m+1}\right|^{n}\left\|z^{(0)}-Cz^{(0)}-d\right\|. \tag{9}$$

Запропонована в теоремі 1 умова збіжності важко перевіряється, оскільки важко оцінити величину $\left|\lambda_{m+1}\right|$. Тому для важливого часткового випадку пропонується інша умова збіжності.

Теорема 2. Нехай в агрегативно-ітеративному алгоритмі (2), (3) параметри a і α вибрано

$$a=\Psi\Lambda, \quad \alpha=\Theta, \tag{10}$$

де Θ – нульова матриця розміру m×m, а матриця C має спектральне подання (7). Тоді, якщо спектральний радіус $\rho(A_3)$ матриці

$$A_3=A_2+\Psi\Lambda(I-\Lambda)^{-1}\Phi^{T}A_2 \tag{11}$$

менший за одиницю, то ітераційний процес

$$x^{(n+1)}=Ax^{(n)}+\Psi\Lambda\left(y^{(n)}-y^{(n+1)}\right)+b, \tag{12}$$

$$y^{(n+1)}=(I-\Lambda)^{-1}\Phi^{T}A_2x^{(n)} \tag{13}$$

за умови вибору початкового наближення із (4) збігається і справджується оцінка похибки (9).

Теорема 2 дає можливість оцінити величину модуля власного значення матриці С $\left|\lambda_{m+1}\right|$, оскільки $\left|\lambda_{m+1}\right|$ є спектральним радіусом матриці A_3 і його можна оцінити через $\left\|A_3\right\|$. Вибір ітераційних параметрів (10) є дуже важливим частковим випадком ітераційного процесу (2), (3).

Зупинимось на питанні вибору чисел λ_i та векторів ψ_i і φ_i. Вважаємо, що для власних значень μ_i матриці А, впорядкованих так, що $\left|\mu_{N+m}\right|\le\ldots\le\left|\mu_{m+1}\right|<\left|\mu_m\right|\le\ldots\le\left|\mu_1\right|$, справджується нерівність $\left|\mu_{m+1}\right|<1$. Якщо за параметри λ_i вибрати власні значення матриці А μ_i, i=1,…m, а за вектори ψ_i і φ_i відповідні праві і ліві власні вектори матриці А, то згідно з твердженням теореми 2 алгоритм (12), (13) збігається. Тому за λ_i та вектори ψ_i і φ_i можна вибрати наближення до μ_i та відповідних їм власних правих та лівих векторів матриці А. Такі наближення можна отримати одним із відомих способів, наприклад, степеневим методом. Якщо вибрані ітераційні параметри λ_i та вектори ψ_i і φ_i задовольнятимуть вимоги теореми 2, то ітераційний процес (12), (13) за умови вибору початкового наближення із (4) збігатиметься і справджуватиметься оцінка (9).

Розглянемо інший спосіб отримання згаданих ітераційних параметрів. Пояснимо суть на прикладі одержання λ_i, ψ_i та φ_i для однопараметричного варіанта методу (12), (13). В цьому випадку m=1 і потрібно знайти параметри λ_1, ψ_1 та φ_1, які для простоти позначимо λ, ψ, φ. Евклідова норма матриці визначається $\left\|A\right\|_E=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}$. Шукатимемо ψ та φ таким чином, щоб матриця $D=A-\psi\varphi^{T}$ мала найменшу евклідову норму. Візьмемо часткові похідні по компонентах ψ_i та φ_i векторів ψ та φ від $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^2}$ та прирівняємо їх до нуля. Отримаємо формули $\varphi = \frac{A^T\psi}{(\psi,\psi)}$ та $\psi = \frac{A\varphi}{(\varphi,\varphi)}$, де (ψ, ψ) – скалярний добуток. Сформулюємо алгоритм так:

1. Виберемо за початкове наближення до вектора ψ вектор $\psi^{(0)}$, компоненти якого $\psi_i^{(0)}$ є сумою елементів і-го рядка матриці А.

2. Наближення до вектора φ одержуємо за формулою

$$\varphi^{(n)} = \frac{A^T\psi^{(n)}}{\left(\psi^{(n)},\psi^{(n)}\right)} \qquad n = 0, 1,\ldots \tag{14}$$

3. Наближення до вектора ψ одержуємо за формулою

$$\psi^{(n+1)} = \frac{A\varphi^{(n)}}{\left(\varphi^{(n)},\varphi^{(n)}\right)} \quad n = 0, 1,\ldots \tag{15}$$

4. Число λ одержуємо за формулою

$$\lambda = \left(\varphi^{(n)},\psi^{(n+1)}\right), \tag{16}$$

після чого за вектори φ і ψ приймаємо вектори $\varphi^{(n)}$ та $\psi^{(n+1)}$, пронормовані так, що $\left(\varphi^{(n)},\psi^{(n+1)}\right) = 1$.

Цей спосіб можна також застосувати для знаходження кількох ітераційних параметрів λ_i та відповідних їм пар ψ_i та φ_i. Для цього потрібно, скориставшись пунктами 1 – 4, отримати λ_1, ψ_1 та φ_1. Потім утворити матрицю $A_2 = A - \lambda\psi_1\varphi_1^T$ і застосувати до неї пункти 1 – 4. Одержані вектори ψ_2 та φ_2 потрібно буде ортогоналізувати до вже знайдених ψ_1 та φ_1, щоб разом вони утворювали біортогональну систему. Можливий також інший спосіб одержання ітераційних параметрів λ_i, ψ_i та φ_i, який природно витікає із наведених міркувань. Він одержується із мінімізації евклідової норми матриці $A - \sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi_i^T$:

1. Користуючись вищенаведеним способом, шукаємо $\lambda_1^{(0)}$, $\psi_1^{(0)}$, $\varphi_1^{(0)}$.

2. Використавши цей самий спосіб до матриці $A - \sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j^{(0)}\psi_j^{(0)}\varphi_j^T$, отримуємо наближення до $\lambda_i^{(0)}$, $\psi_i^{(0)}$, $\varphi_i^{(0)}$, i=2,...m.

3. Подальші наближення шукаємо за формулами

$$\varphi_i^{(n+1)} = \frac{A^T\psi_i^{(n)} - \sum_{j\neq i}(\psi_i^{(n)},\psi_j^{(n)})\varphi_j^{(n)}}{\left(\psi_i^{(n)},\psi_i^{(n)}\right)}, \tag{17}$$

$$\psi_i^{(n+1)} = \frac{A\varphi_i^{(n)} - \sum_{j\neq i}(\varphi_i^{(n)},\varphi_j^{(n)})\psi_j^{(n)}}{\left(\varphi_i^{(n)},\varphi_i^{(n)}\right)} \qquad i = 1,\ldots,m. \tag{18}$$

4. Числа λ_i отримуються із співвідношень

$$\lambda_i = \left(\psi_i^{(n+1)}, \varphi_i^{(n+1)}\right). \tag{20}$$

5. Вектори ψ_i та φ_i i = 1,…,m отримуються шляхом біортогоналізації та нормування векторів $\psi_i^{(n+1)}$ та $\varphi_i^{(n+1)}$, так щоб для них справджувались співвідношення $\left(\psi_i, \varphi_j\right) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$

Цей спосіб краще застосовувати, коли матриця A має близькі за модулем власні значення.

Наведений спосіб одержання ітераційних параметрів можна легко модифікувати для одержання ітераційних параметрів і у випадку, коли деякі з параметрів λ_i і λ_{i+1} є комплексно-спряженими, що відповідає випадку, коли власні значення матриці A μ_i і μ_{i+1} є комплексно-спряженими.

1. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. – М., 1985. 2. Петрович Р.Й. Багатократний агрегативно-ітеративний алгоритм для систем лінійних алгебраїчних рівнянь // Вісник ДУ "Львівська політехніка" "Прикладна математика". – Львів, 1996. – № 299. – С. 183 – 185. 3. Шувар Б.А. Обобщение метода итеративного агрегирования. – Львов: ЛПИ, – 1992. – 21 с. (Деп в УкрНИИНТИ 15.01.92. – № 43 – Ук92).

УДК 65.01

Т.В. Пулина
Запорожский национальный технический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАРКЕТИНГОВОЙ КОНЦЕПЦИИ В РЕАЛИЗАЦИИ ИННОВАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРЕДПРИЯТИЯ

Оцінка інноваційного потенціалу підприємства має найважливіше значення при формуванні і реалізації інноваційної політики підприємства на основі маркетингової концепції.

Estimation of the firm innovation potential is of great importance under organization and realization of the innovation politics of the firm on the basis of the marketing conception.

Успех коммерческой деятельности любого предприятия во многом зависит от того, насколько хорошо в нем сочетаются четыре главных элемента: товар, место, нововведение и цена. Этот процесс начинается непосредственно с изделия и сфокусирован на нем.

При разработке концепции нового изделия возникает ряд последовательных задач, успешное выполнение которых предопределяет успешное завершение работ по созданию нового изделия и его коммерческий успех на товарном рынке.