МЕТРОЛОГІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ВИМІРЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛА НЕДОСТОВЕРНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В СЛУЧАЕ МАЛОГО КОЛИЧЕСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

© *Домбек З., 2003*

Техническо-сельскохозяйственная академия,
кафедра теплотехники и метрологии, Быдгощ, Польша

Запропоновано спосіб визначення значень статистичних параметрів розподілу та їх інтегральних функцій.

Предложено способ определения значений статистических параметров распределения и их интегральных функций.

The way of values definition of statistical distribution parameters and their integral functions is proposed.

Измеряя давление, температуру, параметры течения и др., трудно обеспечить неизмененные условия измерений и часто бывает, что количество измерений небольшое 3–4. Приняв определенный уровень значимости, интервал недостоверности можно найти, пользуясь статистикой *t*-Стьюдента. По мнению автора, традиционные статистические методики расчета не дают достоверного ответа. Коэффициенты статистики *t*-Стьюдента быстро растут с уменьшением количества наблюдений, и полученные математически результаты часто не соответствуют реальности. В докладе представлен другой подход, основанный на численной композиции равномерных распределений вероятностей. Таким образом, получим более приближенное определение интервала недостоверности к реальности, чем другими традиционными способами.

Как известно, результат единичного измерения может быть случайным, поэтому необходимо измерять эту величину несколько раз, чтобы получить более достоверный результат. Однако иногда не удается повторить измерение величины несколько раз в постоянных условиях. Тогда возникает вопрос, как рассчитывать полученные результаты измерений в случае, когда количество измерений ограничено до трех или четырех. Традиционный расчет для прямых измерений выполняют по такой методике:

– найти среднее арифметическое значение и статистическую оценку полученных результатов измерений;

– принять определенный уровень значимости и определить интервал недостоверности, пользуясь статистикой *t*-Стьюдента.

Чтобы рассмотреть правильность и приближение к реальности результатов расчета, найдем недостоверность измерений[1] указанным способом и сравним полученные результаты с результатами, полученными автором численным методом.

Допустим, что можно измерить некоторую величину, например, температуру, только три раза, и при этом были получены такие результаты: 253°C, 255°C и 257°C. Принято, что пределы допускаемых погрешностей средств измерений[2] – это ±2% ≅ ±5 °C.

Таким образом, определен интервал, в котором находится действительное значение измеряемой величины, как <248°C; 262°C>. Определен также интервал, в котором должно находиться среднее арифметическое значение измеряемой величины, как <250°C; 260°C>. Выполним теперь традиционный статистический расчет.

Среднее арифметическое значение:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{253 + 255 + 257}{3} = 255 . \qquad (1)$$

[1] Недостоверность измерений (uncertainty of measurement) это: “Оценка результата измерений, характеризующая область, в которой находится истинное значение измеряемой величины”.

[2] Предел допускаемой погрешности средства измерений (limits of error of measuring instrument) это: “Наибольшее значение погрешности средства измерений, устанавливаемое нормативно-техническим документом для этого типа средств измерений, при котором оно еще признается годным к применению”.

Статистическая оценка:

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{1}^{3}\left(\overline{x}-x_i\right)^2}{3-1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(253-255)^2+(255-255)^2+(257-255)^2}{3-1}}=2\ .(2)$$

Интеграл достоверности для среднего значения:

$$\overline{x}\pm t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}=255\pm 4{,}3027\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=255\pm 4{,}96833$$

(для α = 0,05) $\Rightarrow$ **<250,032;259,968>** (3)

$$\overline{x}\pm t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}=255\pm 9{,}9248\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=255\pm 11{,}079501$$

(для α = 0,01) $\Rightarrow$ **<243,920;266,079>** (4)

$$\overline{x}\pm t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}=255\pm 22{,}3271\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=255\pm 25{,}781114$$

(для α = 0,002) $\Rightarrow$ **<229,219;280,781>** (5)

Недостатком такого подхода является факт, что он не учитывает погрешности прибора, а это очень важно с технической и экономической точки зрения, потому что определяет, каким прибором (методом) необходимо пользоваться, чтобы получить результат с желаемой точностью. Независимо от примененного прибора (метода измерения) результат получим такой же. Как видно из приведенного расчета, результат, полученный для уровня значимости α = 0,05, почти равен вычисленным предельным значениям <250°C;260°C>, а результаты вычислений для α = 0,01 и 0,002 уже совсем недействительные.

Необходимо заметить, что в случае измерения с предельной допускаемой погрешностью ±1% $\cong$ ±2,55 °C предельные значения для среднего арифметического будут равны <252,45;257,55> – это значит – недействительные.

Из приведенных расчетов можно сделать только один вывод, что традиционные методики расчета в случае малого количества измерений не действуют. Статистика *t*-Стьюдента по своим теоретическим положениям предназначена для небольших выборок, только вопрос заключается в том, что для малых выборок коэффициент t_α очень быстро растет с уменьшением количества выборки.

По мнению автора, решение можно найти в композиции (сложении) распределений вероятностей. Если принять, что отдельное измерение – это случайный процесс, вследствие которого результат измерения является случайной переменной, принимающей случайное значение, тогда среднее арифметическое – это тоже случайная переменная, которая будет случайным сложением результатов единственных измерений. Вопрос тогда сводится к методике композиции распределений вероятностей.

Существуют различные методы сложения распределения вероятностей, например [5, 7]. Они очень простые и можно ими пользоваться только для двух слагаемых, поэтому они имеют более учебное, чем прикладное значение. Лучше пользоваться методом, основанным на характеристических функциях, либо численными методами.

Очень важным вопросом является предпосылка типов распределений слагаемых. Обычно принимают два типа: 1) равномерное и 2) нормальное.

Более полезна модель равномерных распределений – она рекомендована не только в литературе, а также международными учреждениями, которые рекомендуют процедуры в оценке недостоверности измерений, принятые стандартами ISO 9000[3]. Такая предпосылка кажется выгодной потому, что действительные распределения составляемых параметров (величин) будут более сосредоточены вокруг математического ожидания, чем равномерное. Композиция равномерных распределений будет наименее сосредоточена вокруг математического ожидания, в сравнении с любой другой предложенной моделью. Это значит одновременно, что ожидаемый разброс значений исследованной величины будет самым большим. Такую модель можно назвать пессимистической.

Пессимистическая модель имеет очень важное практическое значение. Если результаты расчетов покажут, что предусмотренный разброс при такой предпосылке может быть принятым как допустимый, это значит, что планированное предприятие может быть выполнено в практике с большим полем надежности.

Модель нормальных распределений – это оптимистическая модель. Такая предпосылка была бы правильной, если бы не было доминирующих факторов, вызывающих систематические отклонения от математического ожидания, а значение исследованного параметра было бы суммой небольших погрешностей[4]. На практике такие условия создать невозможно.

[3] Guidance Document on Measurement Uncertainty. Commitée of Testing Laboratories IECEE/CTL (Sec) 056/94.

[4] Это имеет практическое значение в проблемах управления качаством методом карт Шюхарта, но это совсем другая тематика.

Всегда будут существовать доминирующие факторы, деформирующие теоретическую случайность, а действительное распределение вероятности будет менее сосредоточено вокруг математического ожидания, чем идеальное, математическое нормальное распределение. Отсюда нормальное распределение можно считать оптимистическим.

Композиция оптимистических распределений дает, конечно, оптимистический результат – это значит, что вычисленный разброс будет наименьшим из всех других комбинаций. Такой результат может быть полезным. Если в практическом применении получим результат, приближенный к допустимому, его можно отбросить, потому что действительные распределения будут менее сосредоточены и действительный разброс будет больше.

Имея в виду предложенные выше рассуждения, в следующих расчетах принимают предпосылку, что составляющие параметры подчинены равномерному распределению.

Преимущество метода определения функции плотности, основанного на характеристических функциях, по сравнению с методом аналитического сложения заключается в том, что возможно прямо вычислить функцию плотности не только для двух, но и для n случайных переменных.

Как известно, характеристическая функция v(t) случайной переменной x определена такой формулой:

$$v(t) = E(\exp itx), \tag{6}$$

где E – математическое ожидание, it – комплексное число.

Для непрерывной случайной величины

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}\,dx, \tag{7}$$

где f(x) – функция плотности вероятности случайной переменной x.

Если x и y – это случайные величины, характеристические функции которых соответственно равны $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, то характеристическая функция суммы равна:

$$\varphi(t)=E\left(e^{itZ}\right)=E\left(e^{it(X+Y)}\right)=$$
$$=E\left(e^{itX}e^{itY}\right)=\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t). \tag{8}$$

По принципу математической индукции можно легко доказать, что это справедливо для любого количества случайных переменных.

На основании теоремы Леви можно найти функцию плотности распределения вероятностей, когда известна характеристическая функция

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt. \tag{9}$$

Для решения нашей задачи можно принять две основные вероятностные модели (для всех составляющих параметров):

– равномерных распределений;

– нормальных распределений.

Функцию плотности равномерного распределения определяет такая формула:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{для} \quad x\le a \text{ и } x>b, \quad (a<b)\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{для} \quad a\le x\le b\end{cases} \tag{10}$$

Если принять:

m – результат единичного измерения;

h – значение половины предела допускаемых погрешностей средств измерений;

получим

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2h} & \text{для} \quad m-h\le x\le m+h\\ 0 & \text{для} \quad \text{остальных значений } x\end{cases}. \tag{11}$$

Отсюда характеристическая функция одномерного распределения будет определена по формуле:

$$\varphi(t)=\int_{m-h}^{m+h}\frac{1}{2h}e^{itx}dx=\frac{1}{2h}\cdot\frac{e^{it(m+h)}-e^{-it(m-h)}}{it}=$$
$$=e^{itm}\frac{\sin(th)}{th}, \tag{12}$$

а характеристическая функция суммы трех случайных величин:

$$\varphi_3(t)=e^{it(m_1+m_2+m_3)}\frac{\sin^3(th)}{(th)^3}, \tag{13}$$

следовательно, функция плотности композиции суммы n случайных величин

$$f_n(y)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(m_1+m_2+m_3-y)}\frac{\sin^3(th)}{(th)^3}dt. \tag{14}$$

Для нормального распределения получаются такие простые формулы.

Композиция n нормальных распределений N (m_k,σ_k) для k=1,..., n – это тоже нормальное распределение с параметрами:

$$\left.\begin{aligned} m&=\sum_{k=1}^{n} m_k\\ \sigma&=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

В итоге можно сказать, что преимуществом метода определения интервала недостоверности измерения с применением характеристических функцией, является возможность определить распределение среднего арифметического значения измеряемой величины, что дает о ней полную информацию. На основании этого можно вычислить все статистические параметры такого распределения, а также определить вероятность любого интервала, в котором лежит действительное значение измеряемой величины. Однако такой метод имеет один, но очень важный недостаток – сложность расчета и поэтому автор рекомендует численный метод [2].

Расчет нашей основной задачи этим методом дает такой результат.

Предельные значения: $\overline{x}_{мин.} = 250.0$, $\overline{x}_{макс.} = 260.0$

Предельный интервал: $\Delta\overline{x} = 10.0$

Параметры распределения

Середина интервала cp = 255.0.

Математическое ожидание m = 255.0.

Статистическая оценка s = 1.667639.

Медяна Me = 255.00.

Мода Mo = 255.00.

Коэффициент асимметрии a3 = 0.000.

Коэффициент эксцесса a4 = 2.60.

В случае измерения с предельной допустимой погрешностью ±1% ≅ ±2,55 °C, получим такие результаты.

Предельные значения: $\overline{x}_{мин.} = 252.45$, $\overline{x}_{макс.} = 257.55$.

Предельный интервал: $\Delta\overline{x} = 5.1$.

Параметры распределения

Середина интервала: cp = 255.0.

Математическое ожидание m = 255.0.

Статистическая оценка s = 0.850479.

Медяна Me = 255.00.

Мода Mo = 255.00.

Коэффициент асимметрии a3 = 0.000.

Коэффициент эксцесса a4 = 2.60.

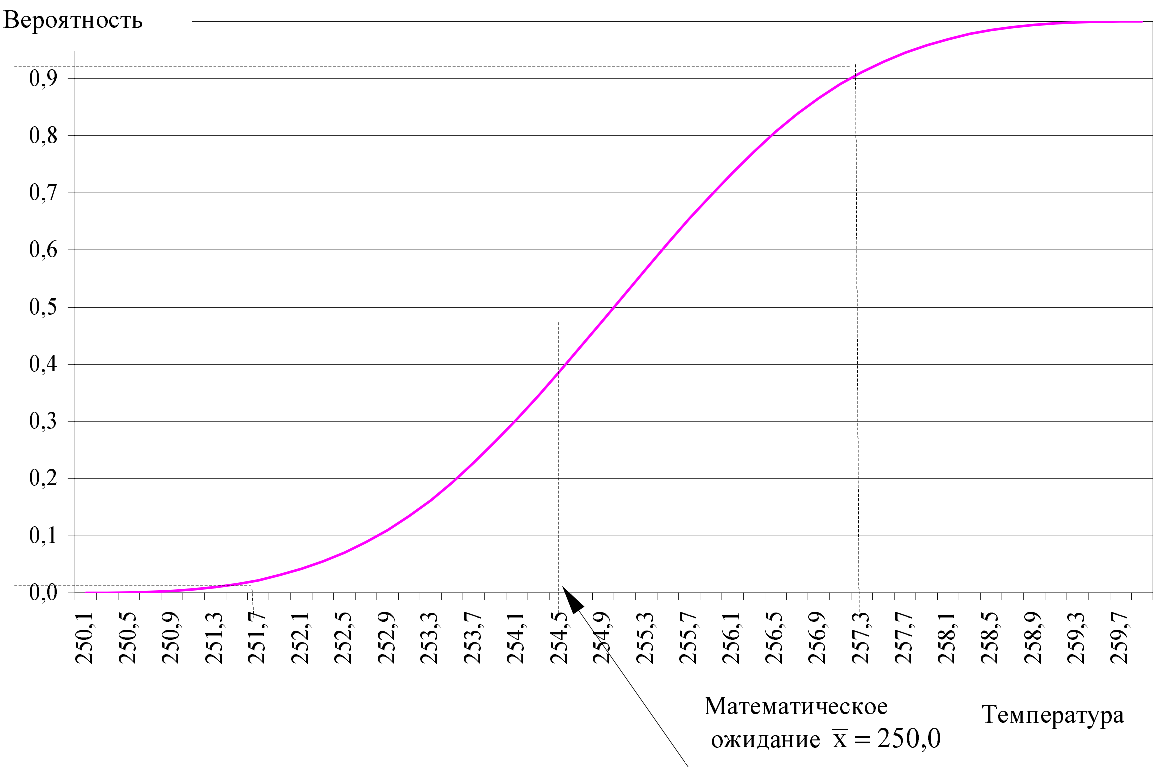

Рис. 1. Интегральная кривая распределения. С вероятностью ок. 0,99 можно утверждать, что действительное значение измеряемой величины находится в интервале < 252,2 ; 257,8 >

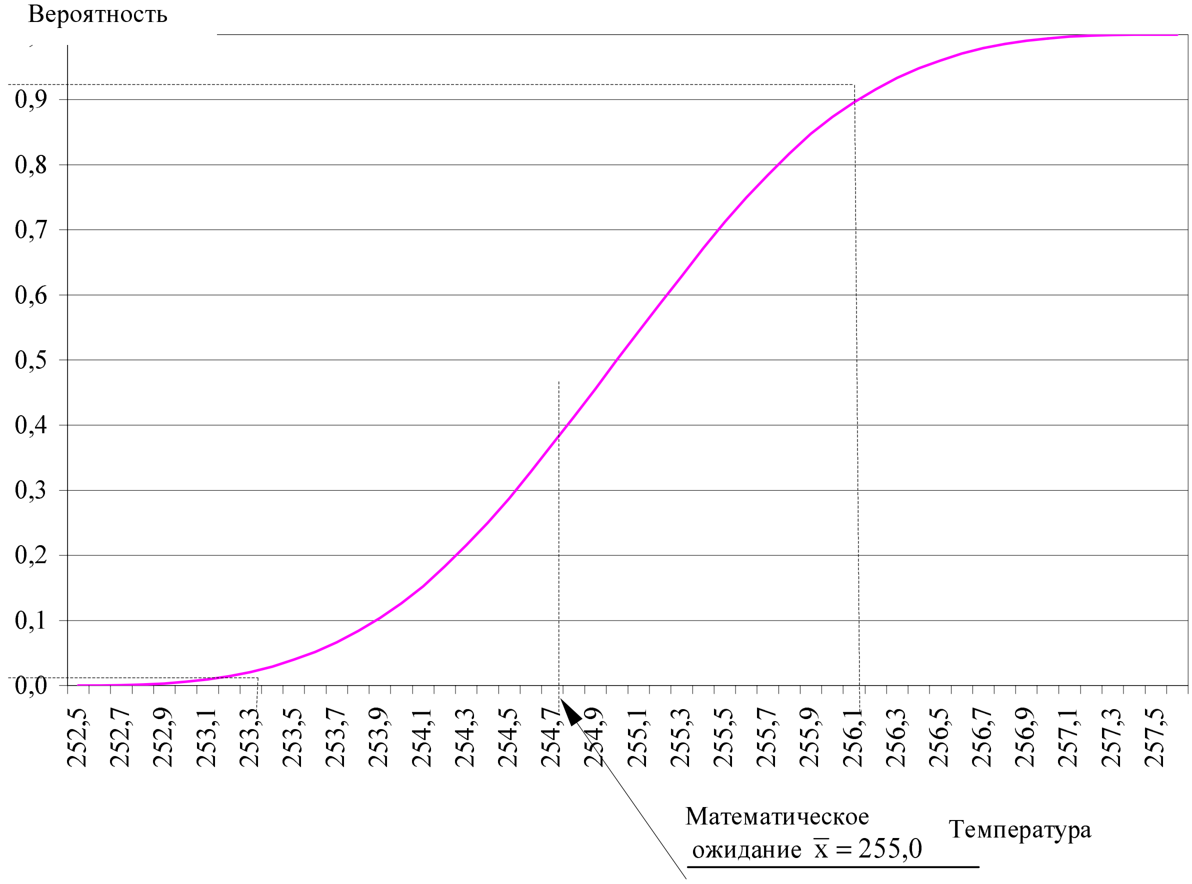

Рис.2. Интегральная кривая распределения. С вероятностью ок. 0,99 можно утверждать, что действительное значение измеряемой величины находится в интервале < 253,6 ; 256,4 >

Выводы. Три или четыре результата измерений, это, безусловно, мало для статистической обработки данных, но если невозможно повторить измерения (примерно по поводу изменяющихся условий измерения) необходимо принять такой способ расчета, результат которого можно считать в меру достоверным в этих условиях.

Результат детерминистического способа расчета показывает предельные значения функции, в случае наиболее невыгодных событий, в результате которых можно получить предельное значение исследованного параметра. Результаты расчета какого-нибудь вероятностного метода не могут выйти за эти пределы. Практическое значение детерминистического решения очень ограничено, потому что вероятность такого события нулевая.

Традиционный метод с применением статистики *t*-Стьюдента не учитывает класса точности использованного прибора и не имеет технического значения.

Применение характеристических функции ведет к очень сложным расчетам и кажется, что его практическое использование, кроме специальных применений, очень ограниченное.

Практическое применение обеспечивает численный метод, предложенный автором.

1. Домбэк З.А. Неопределенность результата измерений в случае малого числа измерений // Мат. Международной научно-практ. конф. Метрологическое обеспечение качества–2000. Минск 28-30 ноября 2000. – Минск, 2000. – С. 52–57. 2. Домбэк З.А. Научные основы детерминистических и вероятностных методов расчета параметров с допусками: Автореф. дис. ...д-ра техн. наук. Минск: 2000. 3. Guidance Document on Measurement Uncertainty. Committée of Testing Laboratories IECEE/CTL. (Sec) 056/94. 4. Guide to expression of uncertainty in measurement. NAMAS, September, 1994. 5. Jezierski J. Analiza tolerancji i niedokładności pomiarów w budowie maszyn WNT, Warszawa, 1994. – S.626. 6. Юдин М.Ф., Селиванов М.Н., Тищенко О.Ф., Скорохолов А.И. Основные термины в области метрологии. – М.,. 1989. 7. Tomaszewski A. Analiza tolerancji w prasowaniach. PWN, Warszawa, 1966. – S. 214.