УДК 539.3

Р.М. Тацій, О.Р. Давидчак
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра будівельної механіки

РОЗРАХУНОК НЕПЕРЕРВНО-ДИСКРЕТНИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ

Запропоновано використання теорії узагальнених квазідиференціальних рівнянь для дослідження стійкості та динаміки неперервно-дискретних стрижневих систем. Розглянуто стійкість стрижня з розподіленою, зосередженими та рознесеними масами під дією постійної стежачої сили в умовах вільного польоту.

Дослідження багатьох неперервно-дискретних систем пов`язане з інтегруванням диференціальних рівнянь і, як правило, це квазідиференціальні рівняння. Зокрема до інтегрування таких рівнянь четвертого порядку зводяться розрахунки згину балок, стійкості стрижнів під дією неконсервативних і консервативних сил, динамічної стійкості стрижня в умовах вільного польоту, розрахунок балок на пружній основі, часткові задачі розрахунку оболонок тощо. Проте, при довільному кусково-неперервному розподілі параметрів моделі, інтегрування диференціального рівняння класичними підходами пов`язане із значними труднощами, які вдається подолати, якщо використати підхід до розв`язування квазідиференціальних рівнянь, запропонований у роботі [1].

I. <u>Побудова розв`язування квазідиференціального рівняння четвертого порядку</u>

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння вигляду

$$L(y)=\left(a_0(x)v^{//}\right)^{//}-\left(a_1(x)v^{/}\right)^{/}+a_2(x)v=q(x), \tag{1.1}$$

де $a_0^{-1}(x)$ – локально обмежена і вимірна на I функція; I – відкритий інтервал дійсної осі; $a_1(x)=\alpha_1'(x)$; $a_2(x)=\alpha_2'(x)$; $\alpha_1(x)$; $\alpha_2(x)$ – функції локально обмеженої на I варіації.

Для розв`язування рівняння (1.1) позначимо квазіпохідні так:

$$v^{[0]}\overset{df}{\equiv}v(x);\, v^{[1]}(x)=v^{/}(x)$$
$$v^{[2]}(x)=a_0v^{//}(x)\,; \quad v^{[3]}(x)=a_1v^{/}(x)-\left(a_0v^{//}(x)\right)^{/}, \tag{1.2}$$

які являють собою відповідно прогин, кут повороту, момент і перерізувальна сили в даному перерізі x.

Вихідне диференціальне рівняння (1.1) звичайно зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$V^{/}(x)=C^{/}(x)\times V(x)+F'(x), \tag{1.3}$$

де
$$V(x)=\begin{pmatrix} v \\ v^{[1]} \\ v^{[2]} \\ v^{[3]} \end{pmatrix};\quad C^{/}(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & a_1(x) & 0 & 1 \\ a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad F(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}; \tag{1.4}$$

$C'(x), F'(x)$ – матриці міри на I (C(x), F(x) – функції локально обмеженої на I варіації).

Функція C(x) допускає стрибки $\Delta C(x) = C(x) - C(x-0)$

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta a_1(x) & 0 & 0 \\ \Delta a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Для отримання простого еволюційного оператора B(x, α), що відповідає квазідиференціальному рівнянню (1.1), коефіцієнти $a_1(x)$ і $a_2(x)$ представляємо у вигляді дельта-функцій

$$a_1(x) = \alpha_1'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k) \quad ; \qquad a_2(x) = \alpha_2'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_2(x_k) \tag{1.6}$$

де $\alpha_1(x) = \int a_1(x)dx$ – представляється кусково-сталою функцією із стрибками в точках $x_k = h \cdot k$; n – кількість ділянок, на які розбивається проміжок інтегрування; $h = x_k - x_{k-1}$.

Стрибок функції $\Delta C(x_k)$ запишеться

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1(x_k) & 0 & 0 \\ f_2(x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

При такому представленні коефіцієнтів a_1, a_2, якщо буде відомий еволюційний оператор диференціального рівняння $(a_0 y'')'' = 0$ – $B(x_k - 0, x_{k-1})$, то фундаментальну матрицю диференціальної системи (1.3) можна знайти за формулою

$$B^*(x, x_0) = \prod_{k=1}^{n} \left(E + \Delta C(x_k)\right) \times B(x_k - 0; x_{k-1}), \tag{1.8}$$

де E – одинична матриця.

Еволюційний оператор рівняння четвертого порядку має таку структуру:

$$B(x,\alpha) = \begin{pmatrix} K^{\{3\}}(x,\alpha) & K^{\{2\}}(x,\alpha) & K^{\{1\}}(x,\alpha) & K(x,\alpha) \\ K^{[1]\{3\}}(x,\alpha) & K^{[1]\{2\}}(x,\alpha) & K^{[1]\{1\}}(x,\alpha) & K^{[1]}(x,\alpha) \\ K^{[2]\{3\}}(x,\alpha) & K^{[2]\{2\}}(x,\alpha) & K^{[2]\{1\}}(x,\alpha) & K^{[2]}(x,\alpha) \\ K^{[3]\{3\}}(x,\alpha) & K^{[3]\{2\}}(x,\alpha) & K^{[3]\{1\}}(x,\alpha) & K^{[3]}(x,\alpha) \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

де $K(x,\alpha)$ – функція Коші; $K^{[i]}, K^{\{j\}}$ – квазіпохідні в сенсі відповідно вихідного і спряженого рівнянь.

Для диференціального рівняння $(a_0(x)v'')'' = 0$

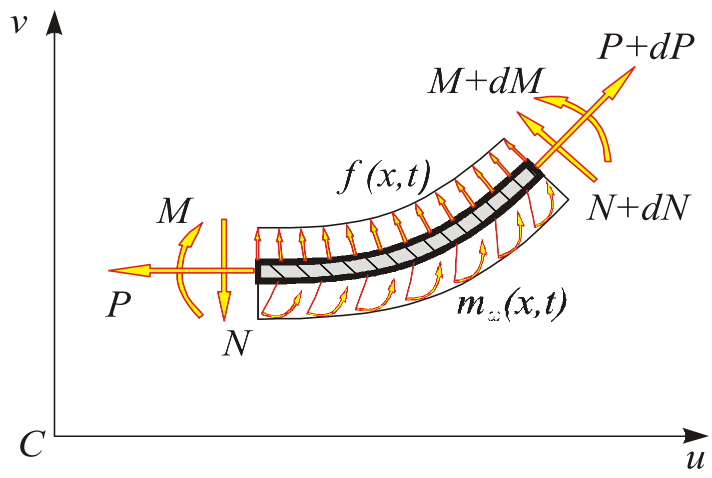
$$K(x,\alpha) = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{a_0(s)}(x-s)(s-\alpha)ds \,. \tag{1.10}$$

Якщо $a_0(s)$ – const, то функцію Коші для рівняння $y^{IV} = 0$ знаходимо за формулою

$$K(x,\alpha) = \frac{(x-\alpha)^3}{3!}. \tag{1.11}$$

II. Плоскі поперечні коливання пружної конструкції в умовах вільного польоту

Розглянемо малі поперечні коливання одновимірного об'єкта в одній площині під дією постійної стежачої сили F_0 і за умови малих просторових поворотів.



Умови рівноваги

Із умов рівноваги елемента dx в площині Cuv (див. рисунок) отримуємо

$$N_v + \frac{\partial M}{\partial x} + m_\omega = 0\,, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial N_v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial V}{\partial x}\right) + f_v(x,t) = 0\,.$$

Приєднюючи до сил, які діють на елемент dx, сили інерції, отримуємо такі рівняння пружних коливань вільного одновимірного об'єкта:

$$N_v + \frac{\partial M}{\partial x} + \mu^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -m_\omega\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial N_v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial V}{\partial x}\right) + m^* \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -f_v(x,t)\,,$$

де

$$m^* = m(x) + \sum M_i \delta(x - x_i)\ ; \qquad \mu^* = \mu(x) + \sum I_i \delta(x - x_i)$$

– погонні маса і момент інерції, причому $m(x)$ і $\mu(x)$ – звичайні функції , а M_i, I_i – маса і момент інерції вантажів, зосереджених в перерізах $x = x_i$; $\delta(x - x_i)$ – дельта-функція Дірака.

Виключаючи із рівнянь (2.2) N_v, отримаємо таке рівняння пружних коливань вільного одновимірного об'єкта:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial V}{\partial x}\right) - m^* \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \mu^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = -\frac{\partial m_\omega}{\partial x} - f_v(x,t)\,. \tag{2.3}$$

Поздовжне стискальне зусилля в стрижні визначається за формулою

$$P(x) = EF\frac{du(x)}{dx} = -F_0 \frac{l_0 - x}{l_0}\,. \tag{2.4}$$

Представляючи власні поперечні коливання $V(x,t)$ у вигляді $V(x,t)=v(x)\cdot\cos\omega t$, із рівняння (2.3) отримуємо для вільних коливань однорідне рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)-\frac{d}{dx}\left(EF\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\right)-\omega^2\left(m^*v-\frac{d}{dx}\left(\mu^*\frac{dv}{dx}\right)\right)=0\,, \tag{2.5}$$

де u – абсолютне поздовжне видовження; $m(x)=m_0(x)+\sum_{k=1}^{j}\delta(x-x_k)M_k$; $m_0(x)$ – розподілена маса стрижня; M_k – маса к-го вантажу.

Із умов статичної рівноваги стрижня отримуємо розподіл поздовжньої стискальної сили в стрижні під дією постійної сили F_0.

$$P(x)=EF\frac{du}{dx}=-\left(1-\frac{1}{M_m}\int_0^x dM(t)\right)F_0=-(1-\frac{1}{M_m}M(x))F_0\,, \tag{2.6}$$

де $M_m=\int_0^{l_0}m_0(x)dx+\sum_{k=1}^{j}M_k$ – загальна маса стрижня; $M(x)=\int_0^x m_0(t)dt+\sum_{k=1}^{j}M_k\eta(x-x_k)$; $\eta(x-x_i)$ – одинична функція Хевісайда.

Рівняння (2.5) із врахуванням (2.6) запишемо так:

$$\left(a_0v''\right)''-\left(a_1v'\right)'+a_2v=0\,, \tag{2.7}$$

де $a_0=EI$; $a_2=-\omega^2\left(m_0+\sum_{k=1}^{j}\delta(x-x_k)M_k\right)$;

$$a_1=-F_0\left(1-\frac{1}{M_m}(\int_0^x m_0(s)ds+\sum_{k=1}^{j}M_k\eta(x-x_k))\right)-\omega^2\left(\sum_{k=1}^{j}I_k\delta(x-x_k)+\mu\right).$$

Прийняті квазіпохідні (1.2) для рівняння (2.7) $v^{[0]}(x)$; $v^{[1]}(x)$; $v^{[2]}(x)$; $v^{[3]}(x)$ являють собою відповідно прогин, кут повороту, момент і перерізувальну силу в даному перерізі x.

Коефіцієнти a_1 і a_2 представимо у вигляді узагальнених функцій (1.6)

$$a_1\sim-F_0\left(\sum_{k=1}^{n}h\delta(x-x_k)-\frac{m_0}{M_m}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}h^2\delta(x-x_k)(2k-1)-\sum_{i=1}^{j}\frac{M_i}{M_m}\eta(x-x_i)\sum_{k=1}^{n}h\delta(x-x_k)\right)-$$
$$-\omega^2\left(\mu\sum_{k=1}^{n}h\delta(x-x_k)+\sum_{k=1}^{j}I_k\delta(x-x_k)\right); \tag{2.8}$$

$$a_2\sim-\omega^2\left(\sum_{k=1}^{n}m_0h\delta(x-x_k)+\sum_{k=1}^{j}M_k\delta(x-x_k)\right),$$

де $h=\frac{1}{n}$.

Тоді

$$\Delta a_1(x_k)\sim-F_0\left(h-\frac{m_0}{M_m}\frac{1}{2}h^2(2k-1)-\sum_{i=1}^{j}\frac{M_i}{M_m}\eta(x_k-x_i)h\right)-\omega^2\left(\mu h+\sum_{i=1}^{j}I_i\delta(x_k-x_i)\right)$$

$$\Delta a_2(x_k)\sim-\omega^2\left(m_0h+\sum_{i=1}^{j}M_i\delta(x-x_i)\right). \tag{2.9}$$

Використовуючи граничні умови для функції $v(x)$, які у даному випадку мають вигляд

$$EIv''(0)=0\ ;\quad EIv'''(0)=0\ ;\quad EIv''(l_0)=0\ ;\quad EIv'''(l_0)=0$$

і розв'язок рівняння (2.7) у вигляді [2]

$$v(x)=B^*(x,x_0)\times v_0, \tag{2.10}$$

де $B^*(x,x_0)$ знаходимо за формулою (1.8), отримуємо рівняння стійкості стрижня.

1. Горошко О.А. Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета. К.: Наукова думка. 1965. 165 с. 2.Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. Наук.-учб. Центр матем. моделюв. ІППММ ім. Я.С. Підстригача АН України. Львів, 1994. 54 с.

УДК 620.179.16

Станіслав Фіц
Люблінська Політехніка, Польща

ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ МІЦНІСТЮ БЕТОНУ НА СТИСК І УДАР ТА ЙОГО ПОРИСТОЮ СТРУКТУРОЮ

Представлено залежність між структурою бетону і його міцністю на стиск і міцності на удар.

Вступ

Під поняттям пористості цементного тіста прийнято вважати суму усіх пустот розміром від 50 до 75000 A^0 (Anqstrem). Поділ пустот залежно від їх розміру прийнято після аналізу праці RIILLEM, згідно з якою

– капілярні пустоти – > 1000 A^0;

– пустоти контракційні (проміжні), що виступають між кристалами вапна і глинисто-сірковапна і знаходяться в межах 100 ÷ 1000 A^0;

– пустоти гелеві – знаходяться в масі слабкоскристалізованих кремнеземів вапна – 50 ÷ 100 A^0.

Дослідження залежності між пористістю і статичною міцністю ветону на стиск було основою дослідів багатьох авторів: Шестопєров, Powers, Bolome"y, Горчаков та ін., натомість вплив пористості бетону на його міцність при динамічному навантаженні (ударі) залишається повною мірою не досліджений.

Методика проведення дослідів

Дослідження міцності бетонів на стиск і удар було виконано на бетонних кубиках розміром 15×15×15 см, після дозрівання в лабораторних умовах протягом 28 діб (**t**=18 ^{0}C, **φ**=90%). Міцність бетону на удар визначено за допомогою балістичного молота [2].

Бетонний кубик, що знаходився на ковадлі, піддано ударним навантаженням за допомогою молота-бабки (розміщеного на сталій висоті), що приводився в рух за допомогою електромагніту. Міцність бетону на удар визначається на основі заобсорбованої через кубик