УДК 517.947

Т.Л. Мартинович, Б.Т. Мартинович, О.В. Куценко (Лобова)
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра будівельної механіки

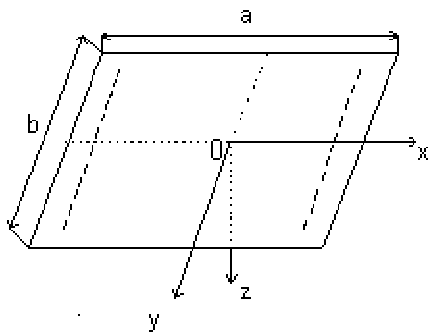
РІВНЯННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ КОЛИВАННЯ ПРЯМОЛІНІЙНО-ОРТОТРОПНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ДВА ПРОТИЛЕЖНІ КРАЇ ЯКОЇ ВІЛЬНО ОПЕРТІ, А ДВА ІНШІ КРАЇ – ВІЛЬНІ

У системі декартових координат з початком в центрі прямокутної області $a \times b$ з осями x і y, паралельними сторонам a і b, однозначні часткові аналітичні розв'язки однорідного рівняння амплітуд, записані у формі суми парної і непарної складових відносно координатних осей x і y. Розглянуто тільки прості (некратні) корені характеристичних рівнянь однорідного рівняння амплітуд.

Докладно розглянуті власні поперечні коливання прямокутної ортотропної пластини, два протилежні краї якої вільно оперті, а два інші краї – вільні. Для симетричних і антисиметричних головних форм власних коливань отримані трансцендентні рівняння частот та аналітичні зображення форм (амплітуд) головних коливань пластини в напрямах, паралельних координатним осям x і y.

1. Постановка задачі

Розглянемо прямокутну прямолінійно-ортотропну пластину, зараховану до головної центральної системи координат xOy, головні напрямки пружності якої паралельні сторонам a і b (див. рисунок).



Симетричні і кососиметричні форми

Розв'язок динамічного рівняння гармонійних коливань оротопропної пластини [1,2]:

$$\sum_{j=0,2,...}^{4} a_j \frac{\partial^4 W^{(2)}(x,y;t)}{\partial x^{4-j} \partial y^j} + \overline{m} \frac{\partial^2 W^{(2)}(x,y;t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1)$$

пропонується шукати у формі добутку двох функцій, які містять незалежні між собою просторові x, y і часову t координати:

$$W_{mn}^{(2)}(x,y;t) = W_{mn}^{(2)}(x,y) \cdot T_{mn}(t), \qquad (1.2)$$

де
$$T_{mn}(t) = a_{mn} \sin(P_{mn} t + \varphi_{mn}). \qquad (1.3)$$

Амплітуда $W_{mn}^{(2)}(x,y)$ функції $W_{mn}^{(2)}(x,y;t)$ виразу (1.2) є розв'язком статичного рівняння

$$\sum_{j=0,2,...}^{4} a_j \frac{\partial^4 W_{mn}^{(2)}(x,y)}{\partial x^{4-j} \partial y^j} - P_{mn}^2 \overline{m} W_{mn}^{(2)}(x,y) = 0. \qquad (1.4)$$

$$(x, y \in a \times b, \quad a_j = \text{const}, \quad \overline{m} = \text{const}).$$

Тут $\overline{m} = \gamma h / g$ – питома маса пластини; P_{mn} – циклічна (колова) частота власних коливань; m, n – натуральні числа.

Повний однозначний розв'язок однорідного рівняння амплітуд (1.4) в прямокутній області $S \in a \times b$ (див. рисунок) запишемо як суму двох часткових розв'язків [2]:

$$W_{mn}^{(2)}(x,y) = W_{1mn}^{(2)}(x,y) + W_{2mn}^{*(2)}(x,y) \qquad (x,y \in S \equiv a \times b), \tag{1.5}$$

де
$$W_{1mn}^{(2)}(x,y) = \exp s_{mn}(x + \mu y), \quad W_{2mn}^{*(2)}(x,y) = \exp s_{mn}^{*}(y + \mu^{*} x). \tag{1.6}$$

Величини s_{mn} і s_{mn}^{*} апріорі невідомі: вони визначаються під час розв'язання крайової задачі рівняння амплітуд (1.4); μ і μ^{*} – прості (некратні) корені характеристичних рівнянь оператора (1.4) [1,2].

Окремо розглянемо симетричні і кососиметричні (антисиметричні) форми (амплітуди) головних власних поперечних коливань прямокутної пластини в напрямах, паралельних координатним осям x і y (див. рисунок).

2. Симетричні форми власних поперечних коливань прямокутної пластини, два протилежні краї якої, паралельні осі y, вільно оперті, а два інші, паралельні осі x, вільні. Рівняння частот

Парні складові амплітуд $W_{1mn}^{(2)}(x,y)$ і $W_{2mn}^{*(2)}(x,y)$ (1.5) однорідного рівняння (1.4) у прямокутній області $S \equiv a \times b$ (рисунок) зображаються аналітичними виразами [1,2]:

$$W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x,y) = \mathrm{ch}(s_{mn}^{*} y) \cdot \left[A_{mn}^{*} \mathrm{ch}(s_{mn} x) + C_{mn}^{*} \cos(s_{mn} r_{mn} x) \right], \tag{2.1}$$

$$W_{(\Pi)mn}^{(2)}(x,y) = \mathrm{ch}(s_{mn} x) \cdot \left[A_{mn} \mathrm{ch}(s_{mn}^{*} y) + C_{mn} \cos(s_{mn}^{*} r_{mn}^{*} y) \right], \tag{2.2}$$

де позначено [3,4]:

$$r_{mn} = \sqrt{1 + \delta_{mn}^{2} a_{2/0}}, \quad r_{mn}^{*} = \sqrt{1 + \delta_{mn}^{*2} a_{2/4}}, \quad \delta_{mn} \delta_{mn}^{*} = 1;$$

$$\delta_{mn} = s_{mn}^{*} / s_{mn}, \qquad \delta_{mn}^{*} = s_{mn} / s_{mn}^{*}, \qquad a_{2/0} = a_2 / a_0, \quad a_{2/4} = a_2 / a_4. \tag{2.3}$$

Повний однозначний парний розв'язок $\widetilde{W}_{(\Pi)mn}^{(2)}(x,y)$ однорідного рівняння (1.4) у прямокутній області $a \times b$ дорівнює сумі парних часткових розв'язків (2.1) і (2.2) (рисунок):

$$\widetilde{W}_{(\Pi)mn}^{(2)}(x,y) = W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x,y) + W_{(\Pi)mn}^{(2)}(x,y). \tag{2.4}$$

Однозначні часткові парні розв'язки (амплітуди) $W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x,y)$ (2.1) і $W_{(\Pi)mn}^{(2)}(x,y)$ (2.2) однорідного рівняння (1.4) повинні задовольняти вздовж периметра $L \equiv 2(a+b)$ пластини однорідні крайові умови (див. рисунок):

при $x = \pm \frac{a}{2}$: $W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x,y) = 0$, $\partial^2 W_{(\Pi)mn}^{*(2)} / \partial x^2 = 0$,

при $y = \pm \frac{b}{2}$: $\dfrac{\partial^2 W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x,y)}{\partial y^2} + \nu_1 \dfrac{\partial^2 W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x,y)}{\partial x^2} = 0$,

$$\frac{\partial^3 W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x,y)}{\partial y^3} + D_{4/2} \frac{\partial^3 W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x,y)}{\partial x^2 \partial y} = 0; \tag{2.5}$$

при $x = \pm \frac{a}{2}$: $W_{(\Pi)mn}^{(2)}(x,y) = 0$, $\partial^2 W_{(\Pi)mn}^{(2)} / \partial x^2 = 0$, при $y = \pm\frac{b}{2}$: $\frac{\partial^2 W^{(2)}_{(\Pi)mn}(x,y)}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 W^{(2)}_{(\Pi)mn}(x,y)}{\partial x^2} = 0$,

$$\frac{\partial^3 W^{(2)}_{(\Pi)mn}(x,y)}{\partial y^3} + D_{4/2} \frac{\partial^3 W^{(2)}_{(\Pi)mn}(x,y)}{\partial x^2 \partial y} = 0; \qquad (2.6)$$

де $D_{4/2} = D_4 / D_2 = \nu_1 + 4(1-\nu_1\nu_2)G/E_2$; E_1, E_2 – повздовжні модулі пружності; G – модуль зсуву, ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона для головних напрямів пружності.

Якщо підставити парні аналітичні вирази амплітуд (2.1), (2.2) і їх похідні по x і y в однорідні крайові умови (2.5), (2.6), то отримаємо такі системи однорідних рівнянь:

$$A^*_{mn}\,\mathrm{ch}(s_{mn}a/2) + C^*_{mn}\cos(s_{mn}r_{mn}a/2) = 0,$$

$$A^*_{mn}\,\mathrm{ch}(s_{mn}a/2) - C^*_{mn}r^2_{mn}\cos(s_{mn}r_{mn}a/2) = 0; \qquad (2.7)$$

$$A_{mn}(s^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn})\,\mathrm{ch}(s^*_{mn}b/2) + C_{mn}(s^{*2}_{mn}r^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn})\cos(s^*_{mn}r^*_{mn}b/2) = 0,$$

$$\begin{aligned} &A_{mn}(s^{*2}_{mn} + s^2_{mn}D_{4/2})\,\mathrm{sh}(s^*_{mn}b/2) + \\ &+ C_{mn}r^*_{mn}(s^{*2}_{mn}r^{*2}_{mn} - s^2_{mn}D_{4/2})\sin(s^*_{mn}r^*_{mn}b/2) = 0. \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Для існування нетривіальних розв'язків визначники однорідних систем рівнянь (2.7) і (2.8) повинні дорівнювати нулю

$$\begin{vmatrix} \mathrm{ch}(s_{mn}a/2) & \cos(s_{mn}r_{mn}a/2) \\ \mathrm{ch}(s_{mn}a/2) & -r^2_{mn}\cos(s_{mn}r_{mn}a/2) \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.9)$$

$$\begin{vmatrix} (s^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn})\,\mathrm{ch}(s^*_{mn}b/2) & (s^{*2}_{mn}r^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn})\cos(s^*_{mn}r^*_{mn}b/2) \\ (s^{*2}_{mn} + s^2_{mn}D_{4/2})\,\mathrm{sh}(s^*_{mn}b/2) & r^*_{mn}(s^{*2}_{mn}r^{*2}_{mn} - s^2_{mn}D_{4/2})\sin(s^*_{mn}r^*_{mn}b/2) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.10)$$

Розвинувши визначники (2.9) і (2.10), дістанемо умови існування ненульових розв'язків систем однорідних рівнянь (рівняння власних частот) (2.7) і (2.8):

$$(1 + r^2_{mn})\,\mathrm{ch}(s_{mn}a/2)\cos(s_{mn}r_{mn}a/2) = 0, \qquad (2.11)$$

$$\frac{r^*_{mn}(s^{*2}_{mn}r^{*2}_{mn} - s^2_{mn}D_{4/2})}{s^{*2}_{mn}r^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn}}\,\mathrm{tg}(s^*_{mn}r^*_{mn}b/2) - \frac{s^{*2}_{mn} + s^2_{mn}D_{4/2}}{s^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn}}\,\mathrm{th}(s^*_{mn}b/2) = 0. \qquad (2.12)$$

Симетричні рівняння власних частот (2.11) і (2.12) коливання прямокутної пластини, два протилежні краї якої вільно оперті, а два інші – вільні (рисунок), запишемо в такому вигляді:

$$\cos\lambda_m = 0; \quad \lambda_m = (1+2m)\pi/2; \quad (m = \overline{0,\infty}); \qquad (2.13)$$

$$\frac{r^*_{mn}(s^{*2}_{mn}r^{*2}_{mn} - s^2_{mn}D_{4/2})}{s^{*2}_{mn}r^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn}}\,\mathrm{tg}\lambda^*_n - \frac{s^{*2}_{mn} + s^2_{mn}D_{4/2}}{s^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn}}\,\mathrm{th}(s^*_{mn}b/2) = 0; \qquad (2.14)$$

де

$$\frac{s^{*2}_{mn}r^{*2}_{mn} - s^2_{mn}D_{4/2})}{s^{*2}_{mn}r^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn}} = \frac{a_{2/0}(a_{2/4} - D_{4/2}) - 1 + D_{4/2}\alpha^2(\lambda_m/\lambda^*_n)^2}{a_{2/0}(a_{2/4} + \nu_1) - 1 - \nu_1\alpha^2(\lambda_m/\lambda^*_n)^2}; \qquad (2.15)$$

$$\frac{s^{*2}_{mn} + s^2_{mn}D_{4/2}}{s^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn}} = \frac{(D_{4/2}a_{2/0} - 1) + \alpha^2(a_{2/4} - D_{4/2})(\lambda_m/\lambda^*_n)^2}{(\nu_1 a_{2/0} - 1) + \alpha_2(a_{2/4} - \nu_1)(\lambda_m/\lambda^*_n)^2}; \qquad (2.16)$$

$$r_{mn}^{*}=\sqrt{\frac{a_{2/4}a_{2/0}-1}{a_{2/4}\alpha^{2}(\lambda_{m}/\lambda_{n}^{*2})-1}}>0;\quad s_{mn}^{*}b/2=\lambda_{n}^{*}/r_{mn}^{*};\quad \alpha=b/a;$$

$$\lambda_{m}=s_{mn}r_{mn}a/2;\qquad \lambda_{n}^{*}=s_{mn}^{*}r_{mn}^{*}b/2 \quad - \tag{2.17}$$

нулі (корені) рівнянь власних частот (2.11)-(2.12). Циклічна частота P_{mn} ортотропної прямокутної пластини обчислюється за формулою [2]

$$P_{mn}=\frac{4}{\alpha ab(a_{2/4}a_{2/0}-1)}\sqrt{a_{4/2}\lambda_{n}^{*4}+(a_{2/4}a_{2/0}-3)\alpha^{2}\lambda_{n}^{*2}\lambda_{m}^{2}+a_{0/2}\alpha^{2}\lambda_{m}^{4}}\sqrt{a_{2}/\overline{m}}\,. \tag{2.18}$$

Формули для обчислення величин s_{mn}, s_{mn}^{*}; r_{mn}, r_{mn}^{*}; δ_{mn}^{2}, δ_{mn}^{*2} є в роботах [3,4].

З виразів (2.17) знаходимо

$$s_{mn}r_{mn}=2\lambda_{m}/a;\qquad s_{mn}^{*}r_{mn}^{*}=2\lambda_{n}^{*}/b. \tag{2.19}$$

Симетричні головні форми власних коливань.

Якщо вирази (2.19) внести у парні складові амплітуд (2.1) і (2.2), отримаємо аналітичні зображення симетричних головних форм (амплітуд) коливань прямокутної пластини в напрямах, паралельних координатним осям x і y:

$$W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x,y)=\mathrm{ch}(s_{mn}^{*}y)\left[A_{mn}^{*}\mathrm{ch}(s_{mn}x)+C_{mn}^{*}\cos(\lambda_{m}\cdot 2x/a)\right],$$

$$W_{(\Pi)mn}^{(2)}(x,y)=\mathrm{ch}(s_{mn}x)\left[A_{mn}\mathrm{ch}(s_{mn}^{*}y)+C_{mn}\cos(\lambda_{n}^{*}\cdot 2y/b)\right]. \tag{2.20}$$

Із систем однорідних рівнянь $(2.7)_1$ і $(2.8)_1$ з врахуванням позначень (2.19) отримаємо

$$A_{mn}^{*}=-C_{mn}^{*}\frac{\cos\lambda_{m}}{\mathrm{ch}(s_{mn}a/2)};\qquad A_{mn}=-C_{mn}\frac{(s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}+\nu_{1}s_{mn}^{2})\cos\lambda_{n}^{*}}{(s_{mn}^{*2}+\nu_{1}s_{mn}^{2})\mathrm{ch}(s_{mn}^{*}b/2)}. \tag{2.21}$$

Якщо внести вирази (2.21) у формули (2.20), дістанемо зображення симетричних головних форм (амплітуд) коливань прямокутної пластини у напрямах, паралельних координатним осям x і y (див. рисунок):

$$W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(x,y)=C_{mn}g_{mn}\cdot\mathrm{ch}(s_{mn}^{*}y)\cos(\lambda_{m}\cdot 2x/a),\quad W_{(\Pi)mn}^{*(2)}(0,0)=W_{(\Pi)mn}^{(2)}(0,0);$$

$$W_{(\Pi)mn}^{(2)}(x,y)=C_{mn}\mathrm{ch}(s_{mn}x)\times$$

$$\times\left[\cos(\lambda_{n}^{*}\cdot 2y/b)-\frac{(s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}+\nu_{1}s_{mn}^{2})\cos\lambda_{n}^{*}}{(s_{mn}^{*2}+\nu_{1}s_{mn}^{2})\mathrm{ch}(s_{mn}^{*}b/2)}\mathrm{ch}(s_{mn}^{*}y)\right], \tag{2.22}$$

де

$$g_{mn}=1-\frac{(s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}+\nu_{1}s_{mn}^{2})\cos\lambda_{n}^{*}}{(s_{mn}^{*2}+\nu_{1}s_{mn}^{2})\mathrm{ch}(s_{mn}^{*}b/2)};\quad C_{mn}^{*}=g_{mn}C_{mn}. \tag{2.23}$$

Поверхня парних амплітуд $\tilde{W}_{(\Pi)mn}^{(2)}(x,y)$ (2.4) над планом прямокутної області $S\equiv a\times b$ зображається сумою амплітуд (2.22) в напрямах, паралельних координатним осям x і y:

$$\tilde{W}_{(\Pi)mn}^{(2)}(x,y)=C_{mn}\left\{\begin{array}{l} g_{mn}\mathrm{ch}(s_{mn}^{*}y)\cdot\cos(\lambda_{m}\cdot 2x/a)+\mathrm{ch}(s_{mn}x)\times \\ \times\left[\cos(\lambda_{n}^{*}\cdot 2y/b)-\dfrac{(s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}+\nu_{1}s_{mn}^{2})\cos\lambda_{n}^{*}}{(s_{mn}^{*2}+\nu_{1}s_{mn}^{2})\mathrm{ch}(s_{mn}^{*}b/2)}\mathrm{ch}(s_{mn}^{*}y)\right]\end{array}\right\}, \tag{2.24}$$

де λ_{m} і λ_{n}^{*} – нулі (корені) рівняння власних частот (2.13) і (2.14).

3. Антисиметричні (кососиметричні) форми власних поперечних коливань прямокутної пластини, два протилежні краї якої, паралельні осі y, вільно оперті, а два інші, паралельні осі x, вільні. Рівняння частот (рисунок)

Непарні складові амплітуд $W^{(2)}_{1mn}(x,y)$ і $W^{*(2)}_{2mn}(x,y)$ (1.5) однорідного рівняння (1.4) у прямокутній області $S \equiv a \times b$ (рисунок) зображаються аналітичними виразами [2]

$$W^{*(2)}_{(H)mn}(x,y) = \operatorname{sh}(s^*_{mn} y)\left[B^*_{mn} \operatorname{sh}(s_{mn} x) + D^*_{mn} \sin(s_{mn} r_{mn} x)\right], \tag{3.1}$$

$$W^{(2)}_{(H)mn}(x,y) = \operatorname{sh}(s_{mn} x)\left[B_{mn} \operatorname{sh}(s^*_{mn} y) + D_{mn} \sin(s^*_{mn} r^*_{mn} y)\right], \tag{3.2}$$

де величини r_{mn}, r^*_{mn}; δ^2_{mn}, δ^{*2}_{mn}; s_{mn}, s^*_{mn} наведені під номером (2.3).

Повний однозначний непарний розв’язок $\tilde{W}^{(2)}_{(H)mn}(x,y)$ однорідного рівняння (1.4) у прямокутній області $S \equiv a \times b$ дорівнює сумі непарних часткових розв’язків (3.1) і (3.2):

$$\tilde{W}^{(2)}_{(H)mn}(x,y) = W^{(2)}_{(H)mn}(x,y) + W^{*(2)}_{(H)mn}(x,y). \tag{3.3}$$

Однозначні часткові непарні розв’язки (амплітуди) $W^{*(2)}_{(H)mn}(x,y)$ (3.1) і $W^{(2)}_{(H)mn}(x,y)$ (3.2) однорідного рівняння (1.4) повинні задовольняти вздовж периметра $L \equiv 2(a+b)$ пластини однорідні крайові умови (див. рисунок):

при $x = \pm \frac{a}{2}$: $W^{*(2)}_{(H)mn}(x,y) = 0$, $\partial^2 W^{*(2)}_{(H)mn} / \partial x^2 = 0$,

при $y = \pm \frac{b}{2}$: $\dfrac{\partial^2 W^{*(2)}_{(H)mn}(x,y)}{\partial y^2} + \nu_1 \dfrac{\partial^2 W^{*(2)}_{(H)mn}(x,y)}{\partial x^2} = 0$,

$$\frac{\partial^3 W^{*(2)}_{(H)mn}(x,y)}{\partial y^3} + D_{4/2} \frac{\partial^3 W^{*(2)}_{(H)mn}(x,y)}{\partial x^2 \partial y} = 0; \tag{3.4}$$

при $x = \pm \frac{a}{2}$: $W^{(2)}_{(H)mn}(x,y) = 0$, $\partial^2 W^{(2)}_{(H)mn} / \partial x^2 = 0$,

при $y = \pm \frac{b}{2}$: $\dfrac{\partial^2 W^{(2)}_{(H)mn}(x,y)}{\partial y^2} + \nu_1 \dfrac{\partial^2 W^{(2)}_{(H)mn}(x,y)}{\partial x^2} = 0$,

$$\frac{\partial^3 W^{(2)}_{(H)mn}(x,y)}{\partial y^3} + D_{4/2} \frac{\partial^3 W^{(2)}_{(H)mn}(x,y)}{\partial x^2 \partial y} = 0; \tag{3.5}$$

де $D_{4/2} = D_4 / D_2 = \nu_1 + 4(1 - \nu_1 \nu_2) G / E_2$; E_1, E_2 – повздовжні модулі пружності; G – модуль зсуву, ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона для головних напрямів пружності.

Якщо підставити вирази непарних складових амплітуд (3.1) і (3.2) і їх похідні по x і y в однорідні крайові умови (3.4) і (3.5), отримаємо системи однорідних рівнянь

$$B^*_{mn} \operatorname{sh}(s_{mn} a/2) + D^*_{mn} \sin(s_{mn} r_{mn} a/2) = 0,$$

$$B^*_{mn} \operatorname{sh}(s_{mn} a/2) - D^*_{mn} r^2_{mn} \sin(s_{mn} r_{mn} a/2) = 0; \tag{3.6}$$

$$B_{mn}(s^{*2}_{mn} + \nu_1 s^2_{mn}) \operatorname{sh}(s^*_{mn} b/2) - D_{mn}(s^{*2}_{mn} r^{*2}_{mn} - \nu_1 s^2_{mn}) \sin(s^*_{mn} r^*_{mn} b/2) = 0,$$

$$B_{mn}(s_{mn}^{*2}+s_{mn}^{2}D_{4/2})\,ch(s_{mn}^{*}b/2)- \\ -D_{mn}r_{mn}^{*}(s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}-s_{mn}^{2}D_{4/2})\cos(s_{mn}^{*}r_{mn}^{*}b/2)=0. \qquad (3.7)$$

Для існування ненульових розв'язків визначники однорідних систем рівнянь (3.6) і (3.7) повинні дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} sh(s_{mn}a/2) & \sin(s_{mn}r_{mn}a/2) \\ sh(s_{mn}a/2) & -r_{mn}^{2}\sin(s_{mn}r_{mn}a/2) \end{vmatrix}=0, \qquad (3.8)$$

$$\begin{vmatrix} (s_{mn}^{*2}+\nu_1 s_{mn}^{2})\,sh(s_{mn}^{*}b/2) & -(s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}-\nu_1 s_{mn}^{2})\sin(s_{mn}^{*}r_{mn}^{*}b/2) \\ (s_{mn}^{*2}+s_{mn}^{2}D_{4/2})\,ch(s_{mn}^{*}b/2) & -r_{mn}^{*}(s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}-s_{mn}^{2}D_{4/2})\cos(s_{mn}^{*}r_{mn}^{*}b/2) \end{vmatrix}=0. \qquad (3.9)$$

Розвинувши визначники (3.8) і (3.9), отримаємо умови існування ненульових розв'язків систем однорідних рівнянь (3.6) і (3.7):

$$(1+r_{mn}^{2})\,sh(s_{mn}a/2)\cdot\sin(s_{mn}r_{mn}a/2)=0, \qquad (3.10)$$

$$\frac{r_{mn}^{*}(s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}-s_{mn}^{2}D_{4/2})}{s_{mn}^{*2}+s_{mn}^{2}D_{4/2}}\,ctg(s_{mn}^{*}r_{mn}^{*}b/2)-\frac{s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}-\nu_1 s_{mn}^{2}}{s_{mn}^{*2}+\nu_1 s_{mn}^{2}}\,cth(s_{mn}^{*}b/2)=0. \qquad (3.11)$$

Антисиметричні рівняння власних частот (3.10) і (3.11) коливання прямокутної пластини, два протилежні краї якої вільно оперті, а два інші – вільні (див. рисунок), запишемо в такому вигляді:

$$\sin\lambda_m=0; \quad \lambda_m=m\pi \quad (m=\overline{0,\infty}); \qquad (3.12)$$

$$\frac{r_{mn}^{*}(s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}-s_{mn}^{2}D_{4/2})}{s_{mn}^{*2}+s_{mn}^{2}D_{4/2}}\,ctg\,\lambda_n^{*}-\frac{s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}-\nu_1 s_{mn}^{2}}{s_{mn}^{*2}+\nu_1 s_{mn}^{2}}\,cth(s_{mn}^{*}b/2)=0. \qquad (3.13)$$

де $\quad D_{4/2}=\nu_1+4(1-\nu_1\nu_2)G/E_2;\ \ \lambda_m=s_{mn}r_{mn}a/2,\quad \lambda_n^{*}=s_{mn}^{*}r_{mn}^{*}b/2 \qquad (3.14)$

нулі (корені) рівнянь власних частот (3.12) і (3.13). Величини s_{mn}, s_{mn}^{*}; δ_{mn}^{2}, δ_{mn}^{*2}; r_{mn}, r_{mn}^{*} поміщені в роботах [3,4].

Циклічна (колова) частота P_{mn} ортотропної прямокутної пластини обчислюється за формулою (2.18).

З виразів (3.14) знаходимо:

$$s_{mn}r_{mn}=\lambda_m\cdot 2/a; \quad s_{mn}^{*}r_{mn}^{*}=\lambda_n^{*}\cdot 2/b. \qquad (3.15)$$

Антисиметричні головні форми власних коливань

Якщо вирази (3.15) внести у непарні складові амплітуд (3.1) і (3.2), отримаємо аналітичні зображення антисиметричних головних форм (амплітуд) коливань прямокутної пластини у напрямах, паралельних координатним осям x і y:

$$W_{(H)mn}^{*(2)}(x,y)=sh(s_{mn}^{*}y)\cdot\left[B_{mn}^{*}sh(s_{mn}x)+D_{mn}^{*}\sin(\lambda_m\cdot 2x/a)\right],$$

$$W_{H)mn}^{(2)}(x,y)=sh(s_{mn}x)\cdot\left[B_{mn}sh(s_{mn}^{*}y)+D_{mn}\sin(\lambda_n^{*}\cdot 2y/b)\right]. \qquad (3.16)$$

Із систем однорідних рівнянь $(3.6)_1$ і $(3.7)_1$ з врахуванням позначень (3.15) отримаємо

$$B_{mn}^{*}=-D_{mn}^{*}\frac{\sin\lambda_m}{sh(s_{mn}a/2)}, \qquad B_{mn}=D_{mn}\frac{(s_{mn}^{*2}r_{mn}^{*2}-\nu_1 s_{mn}^{2})\sin\lambda_n^{*}}{(s_{mn}^{*2}+\nu_1 s_{mn}^{2})\,sh(s_{mn}^{*}b/2)}. \qquad (3.17)$$

Якщо вирази (3.17) внести у формули (3.16), дістанемо зображення антисиметричних головних форм (амплітуд) коливань прямокутної пластини у напрямах, паралельних координатним осям x і y (див. рисунок):

$$W^{*(2)}_{(H)mn}(x,y) = D^{*}_{mn} \mathrm{sh}(s^{*}_{mn} y) \cdot \sin(\lambda_m \cdot 2x/a); \; W^{*(2)}_{(H)mn}(0,0) = W^{(2)}_{(H)mn}(0,0),$$

$$W^{(2)}_{(H)mn}(x,y) = D_{mn} \mathrm{sh}(s_{mn} x) \times$$
$$\times \left[\sin(\lambda^{*}_{n} \cdot 2y/b) + \frac{(s^{*2}_{mn} r^{*2}_{mn} - \nu_1 s^{2}_{mn}) \sin \lambda^{*}_{n}}{(s^{*2}_{mn} + \nu_1 s^{2}_{mn}) \mathrm{sh}(s^{*}_{mn} b/2)} \mathrm{sh}(s^{*}_{mn} y) \right]. \tag{3.18}$$

Поверхня непарних амплітуд $\tilde{W}^{(2)}_{(H)mn}(x,y)$ (3.3) над планом прямокутної області $S \equiv a \times b$ зображається сумою амплітуд (3.18) в напрямах координатних осей x і y:

$$\tilde{W}^{(2)}_{(H)mn}(x,y) = D_{mn} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{sh}(s^{*}_{mn} y) \cdot \sin(\lambda_m \cdot 2x/a) + \mathrm{sh}(s_{mn} x) \times \\ \times \left[\sin(\lambda^{*}_{n} \cdot 2y/b) + \dfrac{(s^{*2}_{mn} r^{*2}_{mn} - \nu_1 s^{2}_{mn}) \sin \lambda^{*}_{n}}{(s^{*2}_{mn} + \nu_1 s^{2}_{mn}) \mathrm{sh}(s^{*}_{mn} b/2)} \right] \mathrm{sh}(s^{*}_{mn} y) \end{array} \right\}. \tag{3.19}$$

де λ_m і λ^{*}_{n} – нулі (корені) рівняння частот (3.12) і (3.13).

Амплітуди $\tilde{W}^{(2)}_{(H)mn}(x,y)$ (3.3) в точках вільно опертих країв прямокутної пластини дорівнюють нулю.

Коефіцієнти a_k (k=0,2,4) рівнянь (1.1), (1.4) позначають жорсткості D_{ij} прямолінійно-ортотропної пластини [5]:

$$a_0 \equiv D_{11}, \qquad a_2 \equiv D_{33}, \qquad a_4 \equiv D_{22}. \tag{3.20}$$

Тут $D_{11,}$ D_{22} – жорсткості згину пластини навколо осей x і y, $D_{33} = D_{11}\nu_2 + 2D_k$, $D_k = Gh^3/12$.

Для ортотропної пластини побічні жорсткості дорівнюють нулю.

1. Т.Л. Мартинович, Б.Т. Мартинович. Побудова аналітичного розв'язку рівняння амплітуд типу Гельмгольца у прямокутній області. ДУ "Львівська політехніка". – Львів, 1999. – 10 с. Укр.-Деп. в ДНТБ України 13.12.99, №335 – Ук99. 2. Т.Л. Мартинович, Б.Т. Мартинович, О.В. Лобова (Куценко). Динамічне рівняння гармонійних коливань: алгоритм побудови розв'язку рівняння амплітуд в прямокутній області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформат. 2000. Вип.3. – С.42-43. 3. Мартинович Т.Л., Мартинович Б.Т., Лобова (Куценко) О.В. Власні коливання прямокутної ортотропної пластини, опертої по всьому периметру // Вісн. НУ "Львівська політехніка". Львів, 2000. №409. С. 137-140. 4. Мартинович Т.Л., Мартинович Б.Т., Лобова (Куценко) О.В. Гармонійні коливання прямокутної прямолінійно-ортотропної пластини, затиснутої по всьому периметру. // Вісник НУ "Львівська політехніка". Львів. 2002. № 441. 7 с. 5. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат. 1957. – 460 с.