УДК 624.131.519

Т.-Н.М. Ванькович, Г.Г. Бігун, В.П. Ляшенко
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра теоретичної механіки

КОЛИВАННЯ В ОДНІЙ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНІЙ СТОХАСТИЧНІЙ СИСТЕМІ

Пропонується математичний метод дослідження випадкових коливань в істотно нелінійних системах, який ґрунтується на послідовному застосуванні теорії спеціальних Ateb-функцій асимптотичного методу нелінійної механіки та теорії марківських процесів. Цей метод розглядає на практиці дослідження коливного процесу системи, що знаходиться під дією стаціонарного гауссового "білого шуму" і описується стохастичними неавтономними диференційними рівняннями.

Розвиток нової техніки вимагає глибшого аналізу причин, які спричиняють вібрації. Доведено, що класичні періодичні збурення не є основними, а методи класичної механіки, що грунтуються на понятті детермінізму, є недостатніми для розуміння і пояснення фізичних ефектів, які виникають, наприклад, при старті ракет з випадковими ексцентриситетами тяги, від впливу на конструкцію профілю дороги чи аеродромного покриття, від дії випадкового вітрового навантаження тощо. Виникла необхідність створення нової фізичної моделі при дослідженні цих динамічних процесів і, зокрема, створення і вдосконалення математичного агрегату, який дозволяв би найточніше описати і врахувати зовнішні випадкові збурення. Таким математичним апаратом є теорія випадкових процесів.

По суті всі задачі механіки, фізики і техніки в строгій математичній постановці описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Лінеаризація геометричних і фізичних величин, що проводиться в задачах, може призвести до суттєвих помилок не лише кількісного, але і принципово якісного характеру. Тому актуальними є розробка нових і вдосконалення існуючих методів дослідження коливних процесів у системах з істотною нелінійністю, що описуються нелінійними стохастичними диференціальними рівняннями. Такі задачі набувають щораз більшого значення на практиці, але зв’язані зі значними математичними труднощами при їх розв’язанні.

Авторами пропонується математичний метод дослідження випадкових коливань в істотно нелінійних системах, який грунтується на послідовному застосуванні теорії спеціальних Ateb-функцій, асимптотичного методу нелінійної механіки та теорії марківських процесів. Цей метод дає можливість ефективно дослідити реакцію механічної системи на випадкову вібрацію (наприклад, розглянути вібраційні процеси фундаменту, підведеного під двигун; розрахувати інерційні навантаження, які передаються на полотно дороги від рухомого транспорту; визначити оптимальні значення параметрів амортизаційних вузлів конструкції для зниження динамічних перенавантажень тощо).

Запропонований метод проілюструємо на прикладі дослідження коливного процесу системи, що знаходиться під дією стаціонарного гауссового "білого шуму" і описується стохастичними неавтономними диференціальними рівняннями вигляду

$$\dot{x}+\omega_1 y^{\nu_1}=\varepsilon f_1(pt,x,y)+\sqrt{\varepsilon}\, f_2(pt,x,y)\dot{\xi}(t),$$
$$\dot{y}-\omega_2 x^{\nu_2}=\varepsilon q_1(pt,x,y)+\sqrt{\varepsilon}\, g_2(pt,x,y)\dot{\xi}(t), \tag{1}$$

де ε – малий параметр; $\omega_1\omega_2$ – деякі сталі додатні величини; $f_i, q_i\,(i=1,2)$ – нелінійні функції, що задовольняють всі необхідні умови існування і єдності системи (1), періодичні по відношенню до pt з періодом 2 π і їх можна представити у вигляді рядів

$$f_i(pt,x,y)=\sum_{n=-N}^{N} e^{inpt} f_{in}(x,y),$$
$$q_i(pt,x,y)=\sum_{n=-N}^{N} e^{inpt} q_{in}(x,y), \tag{2}$$

де $f_{in}(x,y), q_{in}(x,y)$ – деякі функції x, y; $\nu_i=\left(2\nu_i^{(1)}+1\right)\left(2\nu_i^{(2)}+1\right)^{-1}$,; $\left(\nu_i^{(j)}=0,1,2,...\right)(i,j=1,2)$, $\dot{\xi}(t)$ – процес "білого шуму".

Під розв’язанням системи (1) розумітимемо розв’язання системи інтегральних рівнянь

$$x(t)=x_0+\int_0^t\left[-\omega_1 y^{\nu_1}(\tau)+\varepsilon\cdot f_1(p\tau,\ x(\tau),y(\tau))\right]d\tau+\int_0^t\sqrt{\varepsilon}\, f_2(p\tau,x(\tau),y(\tau))d\xi(\tau),$$
$$y(t)=y_0+\int_0^t\left[\omega_2 x^{\nu_2}(\tau)+\varepsilon\cdot q_1(p\tau,x(\tau),y(\tau))\right]d\tau+\int_0^t\sqrt{\varepsilon}\, q_2(p\tau,x(\tau),y(\tau))d\xi(\tau), \tag{3}$$

Перейдемо від системи (1) до системи рівнянь першого порядку відносно амплітуди і фази. Для цього введемо нові змінні

$$x=au(\psi),\ y=a^{\mu}hv(\psi), \tag{4}$$

де

$$\mu=\frac{\nu_2+1}{\nu_1+1},\ h\nu_2+1=\frac{(\nu_1+1)\omega_2}{(\nu_2+1)\omega_1};\ u(\psi), V(\psi)-2\pi-\textit{періодичні}$$

функції, які задовольняють співвідношення

$$u^{\nu_2+1}+v^{\nu_1+1}=1 \tag{5}$$

Крім того, будемо вважати, що виконується умова

$$\nu_1\cdot\nu_2=1 \tag{6}$$

Як і в детермінованому випадку $(f_2=q_2=0)$ будемо розрізняти резонансний і не резонансний випадки.

Нерезонансним вважаємо випадок, коли частота власних коливань ω (вираз для ω буде знайдено нижче) не знаходиться поряд з числами $\frac{r}{s}p$, де r, s – цілі числа. Резонансний випадок існуватиме тоді, коли ω знаходиться поблизу одного з чисел $\frac{r}{s}$ або відношення $\frac{\omega}{p}$ є раціональним числом.

Нерезонансний випадок

Враховуючи (5), (6) і формулу Іто [1], продиференціюємо (4) і підставимо в (1). Одержимо систему стохастичних диференціальних рівнянь для двовимірного марківського процесу

$$da = \varepsilon\Bigg[u^{\nu_2}\cdot f_1(pt,a,\psi) + \frac{a^{1-\nu_2}\nu^{\frac{1}{\nu_2}}}{\nu_2 h} g_1(pt,a,\psi) + \frac{\nu_2\left(u^{\nu_2+1} - u^{2\nu_2}\right)}{2a} f_2^2(pt,a,\xrightarrow{\psi}) -$$

$$\frac{a^{\nu_2}u^{\nu_2}V^{\frac{1}{\nu_2}}}{h} f_2(pt,a,\psi) q_2(pt,a,\psi) + \frac{a^{1-\nu} - 2^{\nu_2^2}\left(V^{\frac{1-\nu_2}{\nu_2}} - \nu_2 V_{\nu_2}^2\right)}{2\nu_2^2 h^2}\cdot q_2^2(pt,a,\psi)\Bigg]dt +$$

$$\sqrt{\varepsilon}\left(u^{\nu_2} f_2\right)(pt,a,\psi) + \frac{a^{1-\nu_2}V_{\nu_2}^{1}}{\nu_2 h} q_2(pt,a,\psi)d\xi, \tag{7}$$

$$d\psi = \Bigg\{\frac{\varpi_2(\iota_2+1)}{2lh\nu_2} + \varepsilon\Bigg[\frac{(\nu_2+1)u}{2\nu_2 lha^{\nu^2}} q_1(pt,a,\psi) - \frac{(\nu_2+1)V}{2la} f_1(pt,a,\psi) +$$

$$+\frac{(\nu_2+1)^2 u^{\nu_2}V}{4la^2} f_2^2(pt,a,\psi) + \frac{\left[(\nu_2+1)V^{\frac{\nu_2+1}{\nu_2}} - \nu_2\right]}{2\nu_2 lha^{\nu_2+1}} f_2(pt,a,\psi)\times$$

$$\times q_2(pt,a,\psi) - \frac{(\nu_2+1)^2 UV^{\frac{1}{\nu_2}}}{4\nu_2^2 lh^2 a^{2\nu_2}} q_2^2(pt,a,\psi)\Bigg\}dt +$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\left[\frac{(\nu_2+1)U}{2lh\nu_2 a^{\nu_2}} q_2(pt,a,\psi) - \frac{(\nu_2+1)V}{2la} f_2(pt,a,\psi)\right]d\xi,$$

де

$$l = \frac{\nu_2+1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\bar{u}^{\nu_2+1}\right)^{\frac{-1}{\nu_2+1}}d\bar{u}.$$

Якщо в (7) зробити заміну $\varphi = \psi - \frac{\omega_2(\nu_2+1)t}{2lh\nu_2}$, то відносно змінних a і φ одержимо систему стохастичних диференціальних рівнянь в стандартній формі, якій ставиться у відповідність таке рівняння Колмогорова – Фокера – Планка (КПФ):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\left[K_a W\right] + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[K_\varphi W\right] = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[DaW\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\varphi}\left[D_{a\varphi}W\right] + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left[D_\varphi W\right]\right\}, \tag{8}$$

де $W = W\left(a,\varphi,t/a_0,\varphi_0,t_0\right)$ – густина сумісного розподілу a і φ;

$$K_a = \varepsilon\Big\{u^{\nu_2} f_1(pt,a,\varphi) + \frac{a^{1-\nu_2}\nu^{\frac{1}{\nu_2}}}{} q_1(pt,a,\varphi) + \frac{\nu_2}{2a}\left(u^{\nu_2-1} - u^{2\nu_2}\right)\cdot f_2^2(pt,a,\varphi) \tag{9}$$

$$-\frac{a^{\nu_2} u^{\nu_2} v^{\frac{1}{\nu_2}}}{h} f_2(pt,a,\varphi) q_2(pt,a,\varphi)+\frac{a^{\frac{1-V_2-2V_2^2}{1+V_2}}\left(V^{\frac{1-V_2}{V_2}}-V_2 V^{\frac{2}{V_2}}\right)}{2V_2^2 h^2} q_2^2(pt,a,\varphi);$$

$$K_\varphi=\frac{(\nu_2+1)u}{2l\nu_2 h a^{V_2}} q_1(pt,a,\varphi)-\frac{(\nu_2+1)v}{2la} f_1(pt,a,\varphi)+\frac{(\nu_2+1)^2 u^{V_2} v}{4la^2} f_2^2(pt,a,\varphi)$$

$$+\frac{(\nu_2+1)\left[(\nu_2+1)v^{\frac{V_2+1}{V_2}}-\nu_2\right]}{2\nu_2 l h a^{\nu_2+1}} f_2(pt,a,\varphi) q_2(pt,a,\varphi)-\frac{(V_2+1)^2 u v^{\frac{1}{V_2}}}{4la^{2\nu_2}\nu_2^2 h^2} q_2^2(pt,a,\varphi);$$

$$D_a=u^{2\nu_2} f_2^2(pt,a,\varphi)+\frac{2a^{1-\nu_2} u^{\nu_2} v^{\frac{1}{\nu_2}}}{\nu_2 h} f_2(pt,a,\varphi) q_2(pt,a,\varphi)+\frac{a^{2-2\nu_2} v^{\frac{2}{\nu_2}}}{\nu_2^2 h} q_2^2(pt,a,\varphi);$$

$$D_{a\varphi}=\left(u^{\nu_2} f_2(pt,a,\varphi)+\frac{a^{1-\nu_2} v^{\frac{1}{\nu_2}}}{\nu_2 h} q_2(pt,a,\varphi)\right)\left(\frac{(\nu_2+1)u}{2lh\nu_2 a^{\nu_2}} q_2(pt,a,\varphi)\right)-\frac{(\nu_2+1)v}{2la} f_2(pt,a,\varphi);$$

$$Д_\varphi=\frac{(\nu_2+1)^2 U^2}{4l^2 h^2 \nu_2^2 a^{2\nu_2}} q_2^2(pt,a,\varphi)-\frac{(\nu_2+1)^2 UV}{2l^2 h \nu_2 a^{\nu_2+1}} f_2(pt,a,\varphi) q_2(pt,a,\varphi)+\frac{(\nu_{2+1})^2 V^2}{4l^2 a^2} f_2^2(pt,a,\varphi).$$

При цьому розв'язок рівняння КФП (8), тобто функція густини розподілу W повинна задовольняти всі необхідні умови позитивності, спадання та нескінченності, нормування до одиниці та початковій умові, наприклад, $W(a,\varphi,t,a_0,\varphi_0,t_0)=\delta(a-a_0,\varphi-\varphi_0)$.

Рівняння (7), (8) є точними і в загальному випадку достатньо складними. Застосування методу усереднення дозволяє значно спростити як систему (7), так і рівняння (8). Тут можливі два підходи: 1) провести усереднення побудованого для системи (7) рівняння КФП (8); 2) провести усереднення системи (7) і вже для усередненої системи записати рівняння КПФ.

Розглянемо перший підхід, як простіший в цьому випадку. Другий підхід, а саме усереднення системи (7), випливає як частковий випадок з методу усереднення стохастичних систем з швидкозмінною фазою [1].

Застосування методу усереднення для параболічних рівнянь [2] дозволяє розв'язання рівняння (8) з коефіцієнтами (9) рівномірно наблизити на достатньо великому скінченному інтервалі часу розв'язанням усередненого рівняння

$$\frac{\partial W_0}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a}\left[\overline{K}_a W_0\right]+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\overline{K}_\varphi W_0\right]=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\overline{D}a W_0\right]+2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\varphi}\left[\overline{D}_{a\varphi} W_0\right]+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left[\overline{D}_\varphi W_0\right]\right\}, \quad (10)$$

де

$$\overline{K}_a(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_a d\theta d\psi, \overline{K}_\varphi(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K_\varphi d\theta d\psi,$$

$$\overline{D}_a(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D_a d\theta d\psi,\ \overline{D}_{a\varphi}(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D_{a\varphi} d\theta d\psi, \quad (11)$$

$$\overline{D}_\varphi(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D_\varphi d\theta d\psi.$$

У формулах (11) введено позначення pt = θ .

Усереднене рівняння (10) в деяких випадках вдається проінтегрувати методом розділення змінних, у всіх інших випадках можна застосувати числовий аналіз.

Резонансний випадок

Оскільки в резонансному випадку розглядаються значення ω, достатньо близькі до $\frac{r}{s}p$, тому вважаємо

$$\omega = \frac{r}{s}p + \varepsilon\Delta, \tag{12}$$

де $\varepsilon\Delta$ є різницею між власними і зовнішніми частотами. Тоді вихідна система (1) з врахуванням умови (6) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} &\dot{x} + \frac{\left(\frac{r}{s}P\right)2l}{(\nu_2+1)h^{\frac{1}{\nu_2}}}y^{\frac{1}{\nu_2}} = \varepsilon\left[\frac{\Delta 2l}{(\nu_2+1)h^{\frac{1}{\nu_2}}} + f_1(pt,x,y)\right] + \sqrt{\varepsilon}f_2(pt,x,y)\dot{\zeta}(t) \\ &\dot{y} - \frac{\left(\frac{r}{s}P\right)2l}{(\nu_2+1)h^{\frac{1}{\nu_2}}}x^{\nu_2} = \varepsilon\left[\frac{\Delta 2lh\nu_2}{(\nu_2+1)} + q_1(pt,x,y)\right] + \sqrt{\varepsilon}q_2(pt,x,y)\dot{\zeta}(t). \end{aligned} \tag{13}$$

Зробивши в системі (13) заміну змінних за формулами (4), одержимо відносно нових змінних a і φ систему стохастичних диференціальних рівнянь першого порядку. Коефіцієнти усередненого рівняння КФП, побудованого для системи (13), в цьому випадку залежать не лише від змінної a, але і від змінної φ, що значно ускладнює розв’язання рівняння (10). Для його розв’язування слід застосувати числові методи.

Приклад. Дослідимо коливний процес, який описується системою неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{x} + y^{\frac{1}{3}} = 0, \\ &\dot{y} - x^3 = \varepsilon\left[1 - (x + E\sin pt)^2 y\right] + \sqrt{\varepsilon}\sigma x^2 \dot{\zeta}(t) \end{aligned} \tag{14}$$

де E; σ – деякі сталі, що характеризують інтенсивність періодичного і випадкового збурень.

Розглянемо нерезонансний випадок, тобто вважатимемо, що частота власних коливань системи ω не лежить поряд з числами $\frac{r}{s}P$ (r, s – цілі числа).

Згідно з вищенаведеним робимо в системі (14) заміну змінних за формулами (4) і для нових змінних a і φ одержуємо таку систему стохастичних диференціальних рівнянь в стандартній формі:

$$\begin{aligned} &da = \varepsilon\left(\frac{av^{\frac{4}{3}}}{3} - \frac{a^3u^2v^{\frac{4}{3}}}{3} - \frac{2Ea^{2uv^{\frac{4}{3}}}\sin pt}{3} + \frac{E^2av^{\frac{-4}{3}}\sin^2 pt}{3} + \frac{\sigma^2u^4v^{\frac{-2}{3}}}{18h^2a} - \frac{\sigma^2u^4v^{\frac{2}{3}}}{6h^2a}\right)dt + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\sigma u^2v^{\frac{1}{3}}}{3h}d\xi, \\ &d\varphi = \varepsilon\left(\frac{2uv}{3l} - \frac{2a^2u^3v}{3l} - \frac{4Eau^2v\sin pt}{3l} + \frac{2E^2uv\sin^2 pt}{3l} - \frac{4\sigma^2u^5v^{\frac{1}{3}}}{9lh^2a^2}\right)dt + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{2\sigma u^3}{3lha}d\xi. \end{aligned} \tag{15}$$

Усереднене рівняння КФП для стаціонарної густини розподілу амплітуди коливного процесу системи (15) набуде вигляду

$$\frac{d}{dt}\left[\left(0{,}25\boldsymbol{a}-0{,}07\boldsymbol{a}^3+0{,}125\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{a}+\frac{\sigma^2\cdot 0{,}01}{a}\right)W_{oc}(\boldsymbol{a})\right]=0{,}005\sigma^2\frac{d^2W_{oc}(a)}{\alpha a^2}. \qquad (16)$$

Враховуючи граничні умови $W_{oc}(a)\to 0, \frac{dW_{oc}}{da}\to 0$ при $a\to\infty$, одержимо розв'язок рівняння (16)

$$W_{oc}(a)=c\cdot a^2\cdot exp\left[-\frac{3{,}5a^4}{\sigma^2}+\frac{25a^2}{\sigma^2}(1-2E)^2\right], \qquad (17)$$

де C – стала нормування функції $W_{oc}(a)$.

Функція (17) має єдиний максимум в точці

$$a=\sqrt{1{,}8\left(1-2E^2\right)+\sqrt{2{,}89\left(1-2E^2\right)^2+0{,}14\sigma^2}}. \qquad (18)$$

Отже, в системі, яка описується системою стохастичних диференціальних рівнянь (14), здійснюються випадкові стійкі коливання з амплітудою (18).

1. Коломиец В.Г., Цикайло Т.-Н.М. Асимптотические методы и периодические Ateb-функции в некоторых нелинейных задачах теории случайных колебаний. – К., 1987, – 64 с. (Препринт АН УССР, Ин-т математики). 2. Хасьминский Р.З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – 8. Вып. 1 – С. 3-25.

УДК 064.012

А.І. Гавриляк, Р.І. Кінаш*, О.Є. Копилов
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра будівельного виробництва,
кафедра архітектурних конструкцій*

ПРОБЛЕМИ ЕКСПЛУАТАЦІЇ ДИМОВИХ ТА ВЕНТИЛЯЦІЙНИХ ТРУБ

Систематизовано та узагальнено досвід роботи спеціалізованих будівельно-монтажних і ремонтних організацій, результати досліджень провідних спеціалізованих наукових і проектних інститутів, а також наведено новітні закордонні матеріали, що стосуються проблем технічної експлуатації димових труб на підприємствах чорної і кольорової металургії, теплових електростанціях, хімії, нафтохімії й інших об'єктах.

1. Основні положення з технічної експлуатації труб

Під технічною експлуатацією промислових димових і вентиляційних труб розуміють здійснення комплексу заходів зі збереження їхньої працездатності в умовах, продиктованих виробничим процесом. Мета технічної експлуатації – збереження надійності труби, запобігання руйнувань, створення безпечних умов праці робітникам і захист навколишнього середовища. Дотримання запроектованих температурного і вологого станів – це основна умова нормальної експлуатації труб.