УДК: 624.131.51.9

Т.-Н.М. Ванькович, Я.А. Зінько, М.В. Боженко
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра теоретичної механіки

ДВА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ КОЛИВАНЬ В ОДНІЙ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНІЙ МЕХАНІЧНІЙ СИСТЕМІ

Запропоновано два методи дослідження випадкових коливань в одній істотно нелінійній механічній системі, яка задовольняє умови ізохронності. У результаті застосування кожного методу зокрема одержуються результати, які повністю збігаються. Запропоновані методи ґрунтуються на використанні періодичних Ateb-функцій, методу усереднення та методу рівнянь Колмогорова–Фоккера–Планка.

Two methods of the research of the accidental vibrations in the essentially non-linear mechanical system has offered in this article. It is satisfied the isochronisms conditions. The results are gotten in this experiment using each method that they are coincidences fully. These methods are based at the using of the periodical Ateb-functions of the average method and Kolmogorova-Fokera-Planka method of the equation.

Актуальність і постановка задачі. Серед процесів, які відбуваються в природі і механіці, коливання займають чи не найважливіше місце. З їх вивченням пов'язано багато важливих задач машино- і приладобудування. Незалежно від галузей техніки, в яких вони розв'язуються (підвіски транспортних засобів, вібраційні оброблювальні машини, роторні системи, бурові колони тощо), усі ці, на перший погляд, різні задачі майже завжди описуються нелінійними диференціальними рівняннями й об'єднані єдиними методами їх дослідження – математичними методами теорії коливань. Відносна простота і цілісність основних принципів теорії лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами в багатьох випадках спонукає дослідників до не завжди обґрунтованої заміни нелінійних випадкових сил лінійними детермінованими силами або до цілковитого нехтування ними. Таке «лінійне детерміноване» трактування багатьох явищ і процесів призводить здебільшого до істотних як кількісних, так і якісних помилок.

Розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь, які описують коливні процесі в нелінійних механічних системах з випадковими збуреннями, з математичного погляду є доволі складним завданням, тому кожний метод дослідження таких коливань має певну цінність.

Зупинимося на порівнянні двох методів дослідження одного і того самого коливного процесу в одній істотно нелінійній системі з випадковими збуреннями типу «білого шуму». Обидва методи ґрунтуються на застосуванні теорії стохастичних періодичних Ateb-функцій, методу усереднення та методу рівнянь Колмогорова–Фоккера–Планка.

Розглядається задача вивчення коливального процесу нелінійного осцилятора з силою опору, яка є нелінійною функцією переміщення і швидкості. Крім детермінованих сил, на осцилятор діє гауссівський «білий шум».

Виклад основного матеріалу. Коливальний процес осцилятора описується стохастичними диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} &\dot{x} + y^{\frac{1}{3}} = 0, \\ &\dot{y} - x^3 = \varepsilon(1 - x^2)y + \sqrt{\varepsilon}\sigma x^2 \dot{\xi}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

де σ – деяке стале число, що характеризує інтенсивність «білого шуму».

Враховуючи формулу Іто диференціювання складних «випадкових функцій» [4], заміною

$$x = a \quad ca \quad \left(3, \quad \frac{1}{3}, \quad l\psi\right);$$
$$y = a^3 h \quad \sigma \quad a \quad \left(\frac{1}{3}, \quad 3, \quad l\psi\right), \tag{2}$$

де $ca\left(3,\ \frac{1}{3},\ l\psi\right)$, $s\,a\left(\frac{1}{3},\ 3,\ l\psi\right)$ – періодичні косинус і синус Ateb-функції [1], а $h = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$; $l = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)} = 1,4$, система (1) зводиться до системи стохастичних диференціальних рівнянь першого порядку відносно нових змінних a і ψ.

$$da = \varepsilon\left(\frac{av^{\frac{4}{3}}}{3} - \frac{a^3u^2v^{\frac{4}{3}}}{3} + \frac{\sigma^2u^4v^{-\frac{2}{3}}}{18h^2a} - \frac{\sigma^2u^4v^{\frac{2}{3}}}{6h^2a}\right)dt + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\sigma u^2v^{\frac{1}{3}}}{3h}d\xi,$$
$$d\psi = \frac{2}{3lh} + \varepsilon\left(\frac{2uv}{3l} - \frac{2a^2u^3v}{3l} - \frac{4\sigma^2u^5v^{\frac{1}{3}}}{9lh^2a^2}\right)dt + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{2\sigma u^3}{3alh}d\xi. \tag{3}$$

Параметр a у формулах (2) для вихідної коливної системи виражається через амплітуду коливань, $a\psi$ – через фазу коливань. Надалі a умовно називатимемо амплітудою коливань.

З другого рівняння системи (3) видно, що частота власних коливань системи є сталою, тому, зробивши в системі (3) заміну $\varphi = \psi - \frac{2}{3lh}t$, одержимо відносно змінних a і φ стохастичні диференціальні рівняння стандартного вигляду.

Розв'язком системи (3) є двовимірний марківський процес, для якого сумісна густина розподілу a і φ $W(a,\varphi,t,a_o,\varphi_o,t_o)$ є розв'язком рівняння у часткових похідних Колмогорова–Фоккера–Планка (КФП) [2]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\left[\varepsilon\left(\frac{av^{\frac{4}{3}}}{3} - \frac{a^3u^2v^{\frac{4}{3}}}{3} + \frac{\sigma^2u^4v^{-\frac{2}{3}}}{18h^2a} - \frac{\sigma^2u^4v^{\frac{2}{3}}}{6h^2a}\right)W\right] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\varepsilon\left(\frac{2uv}{3l} - \frac{2a^2u^3v}{3l} - \frac{4\sigma^2u^5v^{\frac{1}{3}}}{9lh^2a^2}\right)W\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\varepsilon\left(\frac{\sigma^2u^4v^{\frac{2}{3}}}{9h^2}\right)W\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\varphi}\left[\varepsilon\left(\frac{2\sigma u^5v^{\frac{1}{3}}}{9ah^2l}\right)W\right] + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left[\varepsilon\left(\frac{4\sigma^2u^6}{9a^2l^2h^2}\right)W\right]\right\} \tag{4}$$

Стохастичні диференціальні рівняння (1) і (3) є точними і в загальному випадку досить складними. За методом усереднення можна значно спростити як систему (3), так і рівняння (4). Тут можливі два методи: 1) провести усереднення побудованого для системи (3) рівняння КФП; 2) провести усереднення системи (3) і вже для усередненої системи записати рівняння КФП.

Зауважимо, що два вказані методи є рівнозначними для такого виду коливних систем лише в ізохронному випадку, коли добуток степенів у других доданках лівих частин системи (1) дорівнює одиниці. У нашому випадку, $\frac{1}{3}\cdot 3 = 1$.

Як видно, рівняння КФП (4) також має стандартний вигляд, тобто його можна записати так:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon L(a,\varphi,t)W. \tag{5}$$

Згідно з методом усереднення, узагальненого Р.З. Хасьмінським [3] для параболічних і еліптичних диференціальних рівнянь і марківських процесів з малою дифузією, розв'язок рівняння (5) при $\varepsilon \to 0$ можна рівномірно наблизити на як завгодно великому, але кінцевому проміжку часу розв'язком рівняння

$$\frac{\partial W_o}{\partial t} = \varepsilon L_o(a,\varphi)W_o, \tag{6}$$

де L_o – оператор, коефіцієнти якого одержані з коефіцієнтів оператора L усередненням за часом.

Визначимо коефіцієнти усередненого рівняння за формулами

$$\overline{K}_a(a) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} K_a d\psi, \qquad \overline{K}_\varphi(a) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} K_\varphi d\psi,$$

$$\overline{D}_a(a) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} D_a d\psi, \qquad \overline{D}_{a\varphi}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} D_{a\varphi} d\psi,$$

$$\overline{D}_\varphi(a) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} D_\varphi d\psi,$$

де

$$K_a = \frac{av^{\frac{4}{3}}}{3} - \frac{a^3u^2v^{\frac{4}{3}}}{3} + \frac{\sigma^2u^4v^{-\frac{2}{3}}}{18h^2a} - \frac{\sigma^2u^4v^{\frac{2}{3}}}{6h^2a};$$

$$K_\varphi = \frac{2uv}{3l} - \frac{2a^2u^3v}{3l} - \frac{4\sigma^2u^2v^{\frac{1}{3}}}{9lh^2a^2};$$

$$D_a = \frac{\sigma^2u^4v^{\frac{2}{3}}}{9h^2};$$

$$D_{au} = \frac{2\sigma^2u^5v^{\frac{1}{3}}}{9ah^2l};$$

$$D_\varphi = \frac{4\sigma^2u^6}{9a^2l^2h^2}$$

Усереднене рівняння КФП матиме вигляд

$$\frac{\partial W_o}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a}\left[\left(0{,}25a-0{,}07a^3+\frac{\sigma^2\cdot 0{,}01}{a}\right)W_o\right]=0{,}005\sigma^2\frac{\partial^2 W_o}{\partial a^2}+\frac{\partial^2\cdot 0{,}08}{a^2}\frac{\partial^2 W_o}{\partial\varphi^2}. \quad (7)$$

Як випливає з (7), усереднене рівняння для стаціонарної густини розподілу амплітуди $W_{oc}(a)$ запишеться у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left[\left(0{,}25a-0{,}07a^3+\frac{\sigma^2\cdot 0{,}01}{a}\right)W_{oc}(a)\right]=0{,}005\cdot\sigma^2\frac{d^2W_{oc}(a)}{da^2}. \quad (8)$$

Перейдемо до другого методу дослідження вихідної коливної системи (1). Покажемо, що, усереднюючи систему стохастичних диференціальних рівнянь (3) згідно з методикою усереднення систем з швидкозмінною фазою, отримаємо рівняння КФП, яке збігатиметься з щойно одержаним рівнянням (8).

Для системи (3) побудуємо усереднену систему в першому наближенні, тобто введемо заміну змінних

$$a=\overline{a}\,,\qquad \psi=\overline{\psi}\,, \quad (9)$$

Причому нові змінні $\overline{a}$ і $\overline{\psi}$ повинні задовольняти систему стохастичних диференціальних рівнянь вигляду

$$d\overline{a}=\varepsilon A_1^{(o)}(\overline{a})dt+\sqrt{\varepsilon}B_{11}^{(o)}(\overline{a})d\xi_1+\sqrt{\varepsilon}B_{21}^{(o)}(a)d\xi_2\,,$$

$$(10)$$

$$d\overline{\psi}=\left(\omega+\varepsilon C_1^{(o)}(\overline{a})\right)dt+\sqrt{\varepsilon}\,D_{11}^{(o)}(\overline{a})d\xi_1+\sqrt{\varepsilon}\,D_{21}^{(o)}(\overline{a})d\xi_2\,.$$

Тут ξ_1, ξ_2 – незалежні вінерівські процеси.

Визначаючи невідомі коефіцієнти системи (10), використовуючи методику і результати роботи [4], отримуємо

$$A_1^{(o)}(\overline{a})=0{,}25\overline{a}-0{,}007\overline{a}^3+\frac{\sigma^2\cdot 0{,}01}{\overline{a}};$$

$$B_{11}^{(o)}(\overline{a})=0{,}18\,;\qquad B_{21}^{(o)}(\overline{a})=0\,;$$

$$C_1^{(o)}(\overline{a})=D_{11}^{(o)}(\overline{a})=0\,;\qquad D_{21}^{(o)}(\overline{a})=\frac{\sigma\cdot 0{,}16}{\vec{a}}\,.$$

Тоді усереднена система для системи (8) у першому наближенні набуде вигляду

$$d\overline{a}=\varepsilon\left(0{,}25\overline{a}-0{,}07\overline{a}^3+\frac{\sigma^2\cdot 0{,}01}{\overline{a}}\right)dt+\sqrt{\varepsilon}\;\;0{,}1\sigma\,d\xi_1(t)\,,$$

$$d\overline{\psi}=\frac{2}{3lh}dt+\sqrt{\varepsilon}\frac{\sigma\cdot 0{,}16}{\overline{a}}d\xi_2(t) \quad (11)$$

Перше рівняння системи (11) не залежить від змінної ψ і його можна розглядати окремо від другого. Тому для системи (11) легко записати рівняння КФП для стаціонарної густини розподілу амплітуди $W_c\left(\overline{a}\right)$, яке з врахуванням заміни

$$\varphi = \overline{\psi} - \frac{2}{3lh}t$$

в системі (11) запишеться

$$\frac{d}{d\overline{a}}\left(0{,}25\overline{a} - 0{,}07\overline{a}^3 + \frac{\sigma^2 \cdot 0{,}01}{\overline{a}}\right)W_c\left(\overline{a}\right) = \sigma^2 \cdot 0{,}005\frac{d^2 W_c(\overline{a})}{d\overline{a}^2}. \tag{12}$$

Як видно, рівняння (12) збігається з рівнянням КФП (8) для стаціонарної густини розподілу амплітуди $W_{oc}(a)$.

Беручи до уваги граничні умови $W_{oc}(a) \to 0$ і $\frac{dW_{oc}(a)}{dt} \to 0$ при $a \to \infty$, рівняння (8) легко інтегрується

$$W_{oc}(a) = C \cdot a^2 \cdot \exp\left(\frac{25a^2}{\sigma^2} - \frac{3{,}5a^4}{\sigma^2}\right), \tag{13}$$

де стала C знаходиться з умови нормування функції $W_{oc}(a)$.

З аналізу формули (13) випливає, що вона має єдиний максимум при

$$a = \sqrt{1{,}8 + \sqrt{2{,}89 + 0{,}14\sigma^2}}\,. \tag{14}$$

Висновок. Отже, в системі (1) найімовірніше відбуваються вимушені стійкі коливання з амплітудою (14). При $\sigma \to 0$ амплітуда випадкових коливань збігається з амплітудою детермінованих коливань систем

$$a = 1{,}889\,.$$

1. Сеник П.М. Обращение неполной Beta-функции// Укр. мат. журн. – 1969. – №3. – С. 325–333. 2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические диференциальные уравнения. – Киев: Наукова думка, 1968. – 354 с. 3. Хасьминский Р.З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теорія вероятностей и ее применения. – 1963. – Вып. 1. – № 8. – С. 3–25. 4. Коломиец В.Г., Цикайло Т.-Н.М. Асимптотические методы и периодические Ateb-функции в некоторых нелинейных задачах теории случайных колебаний. – К., 1987. – 64 с. (Препринт АН УССР. Ин-т математики; 87.57).