parameters of these components will be reflected in their intensities (I_1 and I_2). The third longest component with lifetime τ_3 is non-fixed. The treatment of experimental data was carried out at fixed lifetime values of τ_1=0.17-0.20 ns and τ_2=0.36-38 ns. The best FIT was obtained at constant lifetimes τ_1 = 0.17 ns and τ_2 = 0.37 ns. Within this approach I_1 and I_2 intensities of the direct PAL components are changes dependently from amount of adsorbed water in the studied ceramics. So increasing of RH from 25 to 98 % result in decreasing of I_1 intensity and increasing of I_2 intensity. The changing of RH from 98 to 25 % reflects inverse to the previous direction in I_1 and I_2 intensities (see table 1). The positron trapping in water-filled defects reflecting the second component with I_2 intensity occurs more intensive.

TABLE 1

PAL CHARACTERISTICS OF CERAMICS

RH, %	FITTING PARAMETERS					
	τ_1, ns	I_1, a.u.	τ_2, ns	I_2, a.u.	τ_3, ns	I_3, a.u.
25	0.17	0.85	0.37	0.14	2.37	0.01
60	0.17	0.83	0.37	0.16	2.81	0.01
98	0.17	0.81	0.37	0.17	2.42	0.01
60	0.17	0.83	0.37	0.16	2.34	0.01
25	0.17	0.84	0.37	0.15	2.38	0.01
RH, %	Positron trapping modes					
	τ_{av}, ns	τ_b, ns	κ_d, ns^{-1}	τ_2 - τ_b, ns	τ_2/τ_b	
25	0.20	0.18	0.44	0.18	2.01	
60	0.20	0.19	0.52	0.18	1.98	
98	0.21	0.19	0.56	0.18	1.97	
60	0.20	0.19	0.50	0.18	1.99	
25	0.20	0.19	0.49	0.18	2.00	

The lifetimes τ_3 are closed to ~2.3-2.8 ns (see table 1). The input of this third component is not change and intensity closed to 0.01. Thus, this channel is non-significant to water sorption-desorption processes. The positron trapping modes such as the average τ_{av}, defect-free bulk τ_b and difference $\tau_2 - \tau_b$ are non-changed with RH. In addition, the positron trapping centre (τ_2/τ_b) is formed on a typical for $MgAl_2O_4$ ceramics level of ~1.9 [2], which testify to the same nature of trapping sites whichever the content of absorbed water. In contrast, most significant changes in positron trapping in $MgAl_2O_4$ ceramics caused by water sorption reflect in positron trapping rate in defect κ_d. Thus, the catalytic water-sorption effect in the studied spinel-structured ceramics is accumulated in non-direct trapping κ_d parameter.

Conclusion

The mathematical treatment of experimental PAL data at constant values of reduced bulk and defect-related lifetimes allow to refine the most significant changes caused by absorbed water in the spinel-structured $MgAl_2O_4$ ceramics

References

[1] R. Krause-Rehberg and H.S. Leipner, "Positron Annihilation in Semiconductors. Defect Studies, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1999, p 378.

[2] H. Klym, A. Ingram, O. Shpotyuk, J. Filipecki and I. Hadzaman, "Extended positron-trapping defects in insulating $MgAl_2O_4$ spinel-type ceramics", Phys. Stat. Sol. C, vol. 4, No 3, pp. 715-718, 2007.

Моделювання однієї оберненої задачі до задачі Стефана

Олена Кобильська

Кафедра інформатики та вищої математики, Кременчуцький державний політехнічний університет
ім. Михайла Остроградського, УКРАЇНА, м.Кременчук, вул.Першотравнева, 20, E-mail: leca91@ya.ru

Abstract* – *A mathematical model is considered as a problem of Steafan for equation of heat conductivity. The decision of problem is found in space of gridding functions of the Rote method and by a report to nonlinear integral equation of Gammershteyn type with a basis of Grina's functions. Basic parameter of control the temperature field defined. The numeral calculations of the temperature distributing are conducted.

Ключові слова – problem of Steafan, mathematical model, heat equation.

I. Вступ

У роботі розглянута математична модель у вигляді задачі Стефана для рівняння теплопровідності. Розв'язок задачі знайдено у просторі сіткових функцій методом Роте та шляхом зведення до системи нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функцій Гріна. Постановка задачі викликана необхідністю створення системи керування температурним полем рухомого середовища.

II. Постановка проблеми

У порошковій металургії виробництво стрижнів та дроту із тугоплавких металів, наприклад вольфраму, відбувається одночасно з процесом підігрівання металу [1]. Це викликано тим, що більшість тугоплавких металів не деформується при кімнатній температурі. Перед пластичною деформацією дріт, що рухається через зону нагрівання довжиною $\xi(t) = L - v(t)t$ зі швидкістю $v(t) \neq 0$, розігрівається електричним струмом I_0 до технологічної температури T_l, а потім потрапляє у пристрій для деформування. При цьому до одного кінця зони нагрівання підведений нерухомий струмопідвід, а до іншого рухомий.

Розглянемо дріт у вигляді рухомого ізотропного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками, що рухається через зону нагрівання зі швидкістю $v(t) \neq 0$. Проблема керування температурним полем, полягає у визначенні потужності джерел тепла $w(T,t)=\dfrac{I(t)^2\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ коли зона нагрівання весь час зменшується та прямує до нуля, а температура у кінці зони нагрівання повинна залишатися сталою. Тому для підтримки сталого значення температури необхідно керувати основним параметром $w(T,t)$ - силою струму $I(t)$. Такого типу задачу можна віднести до задачі Стефана з рухомою межею без зміни фазового стану середовища. [1]

III. Мета роботи

Метою роботи є визначення температурного розподілу у зоні нагрівання, довжина якої є змінною величиною $\xi(t)=L-v(t)t$, $0<t<t_0$ та визначення умов при яких температура буде сталою

IV. Основна частина

Для визначення температурного поля розглядається задача для лінійного рівняння теплопровідності у циліндричній системі координат (r,φ,z) в області $\Omega:\{0<z<\xi(t),0<r<r_0,0<t<t_0\}$.

Зважаючи на фізичну природу діючих джерел тепла $w(T,t)$ та симетрію поля по координаті φ розглядається наступна задача

$$\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-v(t)c\rho_n\frac{\partial T}{\partial z}-c\rho_n\frac{\partial T}{\partial t}=-w(T,t) \qquad (1)$$

$$T(r,z,0)=T_0 \qquad (2)$$

$$T(r,0,t)=T_0,T(r,\xi(t),t)=T_l \qquad (3)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial T(0,z,t)}{\partial r}=0,\\ \lambda\frac{\partial T(r_0,z,t)}{\partial r}=-\alpha(T-T_c)-\varepsilon\sigma(T^4-T_c^4)\end{gathered} \qquad (4)$$

де $w(T,t)=\dfrac{I(t)^2\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ - потужність діючих у циліндричному середовищі джерел тепла, $\lambda,c,\rho_0,\rho_n,\varepsilon$ - теплофізичні характеристики циліндра, T_c –температура навколишнього середовища, σ – стала Стефана – Больцмана, $v(t)$ - швидкість руху середовища через зону нагрівання. Час t_0 визначається із умови $L-v(t)t=0$. Функції $w(T,t)$, $v(t)\in C^1$ - неперервні додатно визначені.

Задача керування полягає у визначенні функції $w(T,t)$ у циліндричній області Ω, та умов при яких температура зони нагрівання буде сталою.

Температурне поле циліндра є змінною величиною, що залежить від сили струму. З математичної точки зору визначення сили струму $I(t)$, що керує температурним полем приводить до розв'язання оберненої задачі до задачі (1)-(4). Для визначення сили струму $I(t)$ необхідно знати температурний розподіл у зоні нагрівання.

На першому етапі дослідження вважаємо, що температурне поле невідоме.

Для рівняння теплопровідності ставляться природні крайові умови теплообміну поверхні з навколишнім середовищем – ставиться крайова задача третього роду з не лінійністю у крайовій умові.

Якщо температурний розподіл уздовж радіуса циліндра не суттєвий, то можна перейти до розгляду усередненого температурного поля. При цьому враховується теплообмін поверхні з навколишнім середовищем [3].

Застосувавши до рівняння (1) оператор усереднення

$$u(z,t)=\frac{2}{r_0^{\,2}}\int_0^{r_0}T(r,z,t)\,rdr \qquad (5)$$

і врахувавши умови теплообміну на границі області (4) отримаємо задачу

$$\begin{gathered}\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-v(t)c\rho_n\frac{\partial u}{\partial z}+u\left(\frac{I^2\rho_0\beta}{\pi^2 r_0^4}-\frac{2\alpha}{r_0}\right)+\\ \frac{I^2\rho_0}{\pi^2 r_0^4}+\frac{2\alpha}{r_0}T_c-\frac{2\varepsilon\sigma}{r_0}(u^4-T_c^4)=c\rho_n\frac{\partial u}{\partial t}\end{gathered} \qquad (6)$$

$$0<z<\xi(t)=L-v(t)t\,,\,0\le t\le t_0$$

$$u(z,0)=T_0 \qquad (7)$$

$$u(0,t)=T_0,u(\xi(t),t)=T_l\,,\xi(t)=L-v(t)t \qquad (8)$$

Розв'язок проблеми ділимо на два етапи. Спершу розв'язується задача (1)-(4) при умові $v(t)=v=const$, $\xi(t)=L=const$ та визначається параметр I_0, що дозволяє підтримувати у кінці зони нагрівання рухомого середовища температуру T_l. Потім, вважаючи, що температурний розподіл у зоні нагрівання відомий розв'язується обернена задача та визначається параметр $I(t)$, необхідний для досягнення температури T_l коли довжина зони нагрівання прямує до нуля.

Розглянемо спрощення задачі (6)-(8), котрі при певних обмеженнях дозволяють отримати аналітичні розв'язки. Знехтувавши перерозподілом тепла у зоні нагрівання за рахунок теплопровідності, та втратами тепла за рахунок випромінювання маємо задачу Коші для рівняння в частинних похідних, аналітичний розв'язок якої (9) отримано методом характеристик

$$u(z,t)=-\frac{1}{\psi_1(T_0\psi_1+\chi_1)}e^{-\psi_1\left(z-\frac{kt^2}{2}+t\right)}-\frac{\chi_1}{\psi_1} \qquad (9)$$

Розв'язавши (9) відносно I_0 отримаємо силу струму необхідну для нагрівання циліндра довжиною L до температури T_l.

Далі розглянемо задачу Коші для нелінійного рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v(t)\frac{\partial u}{\partial z}-u\psi-\chi+\vartheta(u^4-T_c^4)=0\,, \quad (10)$$

$$t>0, 0<z<L$$

$$u(z,t)=\varphi_1(z)\,, u(0,0)=T_0 \quad (11)$$

$$\psi=\frac{I^2\rho_0\beta}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n}-\frac{2\alpha}{r_0 c\rho_n}\,, \chi=\frac{I^2\rho_0}{\pi^2 r_0^4 c\rho_n}+\frac{2\alpha}{r_0 c\rho_n}T_c\,,$$

$$\vartheta=\frac{2\varepsilon\sigma}{r_0 c\rho_n}$$

Її загальний розв’язок має вигляд

$$F(z-\int v(t)dt, t-\int\frac{du}{f(u)})=0 \quad (12)$$

Чисельний розв’язок цієї задачі отримано методом “предиктор - коректор”. Чисельно розв’язується обернена задача до задачі (10)-(11) та визначається параметр $I(t)$.

У задачі (6)-(8) замінено стале значення сили струму I_0 функцією $I(t)$ та знайдено температурний розподіл методом Роте, який базується на дискретизації за часом, з подальшим зведенням системи диференціально-різницевих задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку до системи нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функцій Гріна на кожному часовому кроці.

Висновок

Отримано розв’язок математичної моделі, що описує температурний розподіл рухомого середовища, довжина якого є змінною величиною $\xi(t)=L-v(t)t$, $0<t<t_0$ та визначено функцію $I(t)$ – параметр керування температурним полем.

Ця модель дозволяє враховувати під час обчислення температурних розподілів усі втрати тепла з поверхні. Отримані розв’язки можуть бути використані для проектування системи автоматичного контролю температури дроту та стрижнів під час термічної обробки та пластичної деформації металу.

[1] Крупин А. В. Соловьев В.Я. Пластическая деформация тугоплавких метал лов. М. : Металлургия 1971. 352с.

[2] Березовская Л.М. Кучеренко В.И. К расчету тепловых полей в охлаждаемых струях расплава. – В кн.. Физико-технические приложения краевых задач. Киев: Наук. думка, - 1978,с. 169-176.

[3] Ляшенко В.П., Кобильська О.Б.Математична модель температурного поля рухомого ізотропного середовища Вісник Запорізького національного університету. Збірникнаук. статей. Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2008. - 194 с.

[4] Агошкин В.И., Дубовский П.Б. Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики М.: Физматлит , 2002, 320с.